MỐI LIÊN HỆ GIỮA TOÁN CAO CẤP VÀ TOÁN SƠ CẤP QUA MỘT SỐ CHỦ ĐỀ ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

NGUYỄN XUÂN TÚ
DƯƠNG MINH HOÀNG
PHÙNG THỊ THÚY HẰNG
NGUYỄN ĐÌNH TRUNG KIÊN
ĐINH ĐÀO TUẤN
Trường Đại học Hùng Vương

Nhận bài ngày 26/02/2025. Sửa chữa xong 03/3/2025. Duyệt đăng 08/3/2025.

Abstract

The history of the mathematical development shows that many concepts of Advanced Mathematics originate from Elementary Mathematics. However, the Advanced Mathematics Program at universities is often highly theoretical with little clear connection with Elementary Mathematics which makes students hard to recognize this connection. In addition, Mathematics plays an important role as confirmed in the 2018 general education program, which requires teachers to obtain a solid knowledge of Advanced Mathematics to be able to apply it in teaching Elementary Mathematics. This not only helps teachers to observe Elementary Mathematics from a broader perspective, but also generates creative ways of solving problems, helping students better understand the practical applications of mathematical knowledge.

Keywords: *Connection, Advanced Mathematics, Elementary Mathematics, Algebra, Analysis.*

1. Đặt vấn đề

Lịch sử phát triển của Toán học cho thấy nhiều khái niệm Toán cao cấp bắt nguồn từ Toán sơ cấp hoặc có mối liên hệ mật thiết với Toán sơ cấp. Tuy nhiên, do sự phát triển mạnh mẽ của Toán cao cấp, những mối liên hệ giữa hai lĩnh vực này dần bị che khuất. Chương trình giảng dạy Toán cao cấp tại các trường đại học, đặc biệt trong các ngành như Sư phạm Toán, thường mang tính chất "hàn lâm", với cấu trúc chủ yếu là định nghĩa, ví dụ minh họa, định lý, hệ quả, và ứng dụng. Điều này khiến cho các giáo trình Toán cao cấp thường rất chặt chẽ, chính xác và mang tính lý thuyết cao, nhưng lại thiếu sự liên kết rõ ràng với Toán sơ cấp. Kết quả là, sinh viên (SV) ngành Sư phạm Toán khi học Toán cao cấp thường không nhận ra mối liên hệ giữa hai cấp độ Toán học này và có thể nghĩ rằng Toán cao cấp là một thế giới tách biệt hoàn toàn với Toán phổ thông.

Trong Chương trình giáo dục phổ thông 2018, Toán học là môn học bắt buộc từ lớp 1 đến lớp 12, đóng vai trò quan trọng trong việc hình thành năng lực toán học cho học sinh, cũng như kết nối giữa các môn học như Khoa học, Vật lý, Hóa học, Sinh học, Công nghệ và Tin học. Để đáp ứng yêu cầu này, giáo viên cần có kiến thức vững về Toán cao cấp để có thể áp dụng vào giảng dạy Toán phổ thông. Việc này không chỉ giúp giáo viên nhìn nhận Toán phổ thông từ một góc độ sâu rộng hơn, mà còn tạo ra những cách giải toán mới, sáng tạo, giúp học sinh hiểu rõ hơn về ứng dụng thực tế của các kiến thức toán học.

Vấn đề quan trọng là làm thế nào để SV ngành Sư phạm Toán có thể nhận thức rõ ràng mối liên hệ giữa Toán cao cấp và Toán phổ thông, từ đó có thể khai thác các kiến thức từ Toán cao cấp vào việc giảng dạy sau này. Chính vì lý do này, nghiên cứu "Mối liên hệ giữa Toán cao cấp và Toán sơ cấp qua một số chủ đề Đại số và Giải tích" là một vấn đề nghiên cứu cần thiết và đáng được quan tâm.

Email: nguyenxuantu@hvu.edu.vn.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Mối liên hệ giữa chủ đề ma trận, định thức với toán học phổ thông

Chủ đề Ma trận, Định thức và các phương pháp biến đổi liên quan là những nội dung toán học quan trọng trong các giáo trình đào tạo SV ngành Sư phạm Toán học, các ngành Kinh tế, các ngành Kĩ thuật [1], [4], [5]. Sau đây, chúng tôi sử dụng lý thuyết của mạch kiến thức này để giải một số bài toán ở phổ thông.

2.1.1. Kiến thức cơ sở

a. Định nghĩa ma trận và định thức

- Ma trận kiểu (m,n) là một bảng gồm $m.n$ số được viết thành m dòng, n cột như sau:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Trong đó a_{ij} là phần tử ở hang thứ i và cột thứ j với $i=1,2,\ldots,m; j=1,2,...,n.$

- Định thức của A, ký hiệu $\det(A)$ (hoặc $\det A$) là biểu thức:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$.được đính bằng quy nạp như sau:

$n=1: A=(a_{11}) \Rightarrow \det(A)=a_{11}=\det(M_{11})$

$n=2:\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}\det(M_{11})-a_{12}\det(M_{12})$.

…

n bất kì: $\det(A)=a_{11}.\det(M_{11})-a_{12}.\det(M_{12})+a_{13}.\det(M_{13})-...+(-1)^{n+1}a_{1n}.\det(M_{1n}).$

b. Phương pháp khử Gauss

Giả sử có hệ tam giác như sau: $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \quad \cdots \\ a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$

Để giải hệ phương trình này chúng ta sử dụng phép thế: từ phương trình thứ n ta tìm được x_n, thế giá trị x_n vào phương trình thứ $n-1$ ta được x_{n-1}, thế giá trị x_n, x_{n-1} vào phương trình $n-2$ ta được x_{n-2} ,... cứ như vậy tìm được nghiệm của hệ phương trình ban đầu.

Để giải hệ phương trình tuyến tính $Ax=b, A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, ta viết ma trận vế phải b vào sau ma trận hệ số A để được mà trận hình chữ nhật $[A,b]$. Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp (nhân một hàng với một số $k\neq 0$; đổi chỗ hai hàng; nhân một hàng với một số k rồi cộng vào một hàng khác) để đưa ma trận A trong ma trận $Ax=b$ về dạng tam giác. Vì các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính nên ta có hệ ban đầu $Ax=b$ tương đương với một hệ tam giác, từ đó tìm được nghiệm của hệ đã cho.

c. Phương pháp Cramer

Hệ phương trình tuyến tính $Ax=b$ được gọi là một hệ Cramer nếu ma trận hệ số A là ma trận vuông và $\det(A)\neq 0$.Hệ Cramer $Ax=b$ với $(a_{ij})_{n\times n}$ luôn có nghiệm duy nhất xác định bởi $\left(x_1=\frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2=\frac{\det(A_2)}{\det(A)},...,x_n=\frac{\det(A_n)}{\det(A)}\right)$.

Trong đó, $A_i\ (i=1,2,...,n)$ là ma trận sinh ra từ ma trận A bằng cách thay cột thứ i của ma trận A bởi cột vế phải.

2.1.2. Sử dụng lý thuyết về ma trận, định thức để giải bài toán hệ phương trình ở phổ thông

Sau đây, ta sẽ sử dụng phương pháp Gaus, phương pháp Cramer để giải bài toán về hệ phương trình nhiều ẩn ở phổ thông sau:

Bài toán 1. Giải hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 \quad - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 7x_4 = -7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \quad = 3. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8. \end{cases}$

Nhận xét: Để giải bài toán trên với kiến thức toán phổ thông ta phải thực hiện các phép biến đổi cộng đại số hoặc phép thế để khử dần các ẩn trong phương trình, việc làm này khá phức tạp đòi hỏi phải biến đổi khéo léo mới khử được ẩn. Tuy nhiên nếu sử dụng phương pháp Gauss và phương pháp Cramer để biến đổi hệ về hệ tam giác hoặc tính định thức của các ma trận A_i thì việc giải hệ phương trình trở nên dễ dàng hơn. Sau đây là lời giải chi tiết áp dụng kiến thức Toán cao cấp để giải bài toán.

Lời giải: a) Ta có ma trận hệ số của hệ phương trình như sau:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 7 & -7 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp đưa ma trận hệ số về dạng tam giác

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 7 & -7 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{h_1+h_3\to h_3 \\ -2h_1+h_4\to h_4}]{-h_1+h_2\to h_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[-h_2+h_4\to h_4]{-h_2+h_3\to h_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{h_3+h_4\to h_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

Vậy hệ ban đầu tương đương với hệ tam giác sau: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ 1x_3 + 3x_4 = -3 \\ 2x_4 = -2 \end{cases}$.

Từ phương trình thứ tư ta có $x_4 = -1.$

Thay $x_4 = -1$ vào phương trình thứ ba, ta được $x_3 = 0$; Thay $x_3 = 0,\ x_4 = -1$ vào phương trình thứ hai, ta được $x_2 = 1.$; Thay $x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = -1$ vào phương trình thứ nhất, ta được $x_1 = 2$. Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2,1,0,-1)$.

b. Ta có ma trận hệ số của hệ phương trình như sau: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = -130 \neq 0$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 6 & -5 & -2 & 1 \\ 8 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_1) = -330. \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & 1 \\ 5 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = 55.$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & 1 \\ 5 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_3) = 25. \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & -2 & 6 \\ 5 & -1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_4) = 205.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $\left(x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{33}{13}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-11}{26}, x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-5}{26}, x_4 = \frac{\det(A_4)}{\det(A)} = \frac{-41}{26}\right)$.

2.2. Mối liên hệ giữa chủ đề Dãy số với toán học phổ thông

Nội dung Dãy số và Giới hạn dãy số là một trong các mạch kiến thức quan trọng trong Chương trình đào tạo SV các ngành Sư phạm Toán, các ngành Kĩ thuật và được viết khá hàn lâm trong các giáo trình

đại học [2], [3]. Dưới đây là một số kiến thức cở sở được sử dụng để giải một số bài toán xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi ở phổ thông.

2.2.1. Kiến thức cơ sở

a. Khái niệm giới hạn dãy số: Định nghĩa giới hạn của dãy số thực: Cho dãy số thực $\{u_n\}$. Số $a \in \mathbb{R}$ được gọi là giới hạn của dãy nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước bao giờ cũng tồn tại một số n_0 (phụ thuộc ε) sao cho với mọi $n > n_0$ ta đều có $|u_n - a| < \varepsilon$. Khi đó, ta nói rằng dãy $\{u_n\}$ hội tụ đến a hay tiến đến giới hạn a và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

b. Sử dụng tính đơn điệu để xét tính hội tụ của dãy số

- Nếu $\{u_n\}$ là dãy tăng bị chặn trên thì nó hội tụ và giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sup u_n$.
- Nếu $\{u_n\}$ là dãy giảm bị chặn dưới thì nó hội tụ và giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \inf u_n$.

2.2.2. Sử dụng lý thuyết hội tụ để giải bài toán dãy số trong đề thi học sinh giỏi ở phổ thông.

Bài toán sau đây là một dạng toán nâng cao được sử dụng trong các kỳ thi học sinh giỏi ở phổ thông.

Bài toán 2. Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định theo công thức sau: $u_1 = \sqrt{2}$; $u_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$; …; $u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$.

Hãy tìm giới hạn của dãy số $\{u_n\}$ trên.

Nhận xét: Để giải bài toán trên với kiến thức ở phổ thông, việc tính trực tiếp giới hạn của dãy số là rất khó khăn. Tuy nhiên, nếu sử dụng lý thuyết tính đơn điệu của dãy số thì việc tìm giới hạn của dãy số $\{u_n\}$ trở nên đơn giản hơn. Sau đây là lời giải chi tiết áp dụng kiến thức toán cao cấp để giải bài toán.

Lời giải: Ta chú ý rằng: $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$. Do $u_1 = \sqrt{2} < 2$ nên $u_2 = \sqrt{2+u_1} < \sqrt{2+2} = 2$.

Do đó nếu giả sử $u_n < 2$ thì $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} < 2$. Chứng minh quy nạp ta chỉ ra rằng dãy số trên bị chặn trên bởi 2. Lại có: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2+u_n}}{u_n} = \sqrt{\frac{2}{u_n^2} + \frac{1}{u_n}} > \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{1}{2}} = 1$. Do đó $u_{n+1} > u_n$.

Suy ra $\{u_n\}$ là dãy tăng. Vậy $\{u_n\}$ là dãy tăng và bị chặn trên nên nó là dãy hội tụ. Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$. Từ biểu thức $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ ta có $a^2 = 2 + a$. Suy ra $a = 2$. Vậy dãy số $\{u_n\}$ có giới hạn là 2.

Bài toán 3 (Đề thi HSG QG năm 2012). Cho dãy số (x_n) được xác định bởi: $x_1 = 3$ và $x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2), \forall n = 2,3,...$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn, tính giới hạn đó.

Nhận xét: Bài toán trên nằm trong đề thi HSG QG năm 2012, với dạng toán này thì việc tìm số hạng tổng quát x_n từ đó tính giới hạn của dãy số theo kiến thức toán phông thường dùng sẽ gặp khó khăn. Tuy nhiên, sử dụng lý thuyết tính đơn điệu của dãy số thì việc tìm giới hạn của dãy số trở nên đơn giản hơn. Sau đây là lời giải chi tiết áp dụng kiến thức toán cao cấp để giải bài toán.

Lời giải: Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $x_{n-1} \geq \frac{n+2}{n-1}, \forall n = 3,4,...$ Suy ra dãy số (x_n) bị chặn dưới bởi số 0. Mặt khác, $x_n - x_{n-1} = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2) - x_{n-1} = \frac{2[n+2-(n-1)x_{n-1}]}{3n} \leq 0$. Vậy dãy số (x_n) giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn hữu hạn.

Đặt $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n = a$ từ biểu thức $x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2), \forall n = 2,3,...$ Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2)$ hay $a = \frac{1}{3}(a+2) \Leftrightarrow a = 1$. Vậy $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 1.$

2.3. Mối liên hệ giữa các định lý giá trị trung bình với toán học phổ thông

Các định lý giá trị trung bình là nội dung nằm trong mạch kiến thức Giải tích trong Chương trình Toán cao cấp mà có nhiều ứng dụng trong các bài toán phổ thông.

2.3.1. Kiến thức cơ sở

a. Định lý Rolle: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và khả vi trong khoảng (a,b) thỏa mãn $f(a) = f(b)$. Khi đó tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = 0.$

b. Định lý Lagrange: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và khả vi trong khoảng (a,b). Khi đó tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a,b)$ sao cho $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

c. Định lý Cauchy: Giả sử hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và khả vi trong khoảng (a,b). Khi đó tồn tại ít nhật một điểm $c \in (a,b)$ sao cho $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$.

2.3.2. Sử dụng các định lý giá trị trung bình giải một số bài toán ở phổ thông

Sau đây, ta sử dụng Định lý Rolle để giải một bài toán phương trình mũ dành cho học sinh khá giỏi trong chương trình môn Toán lớp 11.

Bài toán 4. Giải phương trình $3^x+5^x=2.4^x$.

Nhận xét: Theo chương trình toán phổ thông, ta sẽ giải phương trình bằng phương pháp hàm số. Vì phương trình không có nghiệm duy nhất nên sẽ gặp khó khăn khi sử dụng phương pháp này. Tuy nhiên, nếu sử dụng Định lý Rolle thì việc giải bài toán trở nên đơn giản. Sau đây là lời giải chi tiết áp dụng kiến thức toán cao cấp để giải bài toán.

Lời giải: Nhận thấy $x=0;x=1$ là hai nghiệm của phương trình, bằng cách thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình. Ta sẽ chứng minh phương trình chỉ có hai nghiệm trên.

Gọi x_0 là nghiệm của phương trình đã cho. Ta được: $3^{x_0}+5^{x_0}=2.4^{x_0} \Leftrightarrow 5^{x_0}-4^{x_0}=4^{x_0}-3^{x_0}$. Xét hàm số $f(t)=(t+1)^{x_0}-t^{x_0}$ suy ra $f(t)$ liên tục trên [3; 4], khả vi trong khoảng (3; 4) và theo trên ta có $f(4)=f(3)$. Do đó áp dụng Định lí Rolle tồn tại $c \in (3;4)$ sao cho $f'(c)=0$. Suy ra $x_0[(c+1)^{x_0-1}-c^{x_0-1}]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=1 \end{array}\right.$. Vậy phương trình có hai nghiệm x = 0 và x = 1.

Bài toán 5. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{a-b}{2} \le \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \le \frac{b-a}{2}$.

Nhận xét: Bài toán trên là dạng toán nâng cao trong các kỳ thi HSG của lớp 11. Nếu sử dụng các phép biến đổi lượng giác để đánh giá bất đẳng thức trên thì không khả thi. Nhưng nếu khéo léo vận dụng Định lý Lagrange thì sẽ giải quyết được vấn đề của bài toán. Sau đây là lời giải chi theo hướng áp dụng Định lý Lagrange.

Lời giải: Bất đẳng thức cần chứng minh suy ra $a-b \le \sin a-\sin b \le b-a$. Vậy ta cần chứng minh bất đẳng thức: $|\sin a-\sin b| \le |b-a|$.

Xét hàm số $f(x)=\sin x, x \in (a,b)$. Suy ra hàm số f liên tục và khả vi trong (a,b). Áp dụng định lý Lagrange tồn tại số $c \in (a,b)$ sao cho $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. Do đó ta có $\sin b-\sin a=\cos c(b-a)$. Suy ra $|\cos c|=\frac{|\sin b-\sin a|}{b-a}$. Vì $|\cos x| \le 1$ nên $\frac{|\sin b-\sin a|}{b-a} \le 1$.

Vậy ta có $|\sin a-\sin b| \le |b-a|$.

3. Kết luận

Qua nghiên cứu mạch kiến thức Đại số và Giải tích trong chương trình Toán cao cấp, tác giả nhận thấy SV ngành Sư phạm Toán học khi học các kiến thức Toán cao cấp cần phải biết sử dụng kiến thức đã học để soi sáng kiến thức Toán phổ thông và hiểu được mối liện giữa chúng. Ngoài ra trong Chương trình đào tạo đại học với mỗi chủ đề cần tích hợp các bài toán tương ứng ở phổ thông, nên tổng hợp thành từng dạng cụ thể dần hình thành chuyên đề đầy đủ cho người học nâng cao kiến thức, có thể tự tổng quát và tạo được hệ thống bài tập trong học tập và nghiêm cứu. Trong quá trình sưu tầm và tổng hợp tài liệu, do khả năng và thời gian có hạn nên một số kết quả của chuyên đề mới dừng lại ở những kết luận ban đầu, một số vấn đề của chuyên đề có thể chưa được phát triển sâu. Vì vậy rất mong được sự quan tâm đóng góp ý kiến của các thầy cô, các bạn đồng nghiệp để chuyên đề có chất lượng tốt hơn.

Tài liệu tham khảo

[1] Lê Tuấn Hoa (2016), *Đại số tuyến tính qua ví dụ và bài tập*, NXB Giáo dục Việt Nam, Hà Nội.

[2] Trần Đức Long, Nguyễn Đình Sang, Hoàng Quốc Toàn (2008), *Giáo trình Giải tích* (tập 1, 2, 3), NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[3] Nguyễn Tiến Mạnh (chủ biên), Hoàng Công Kiên, Nguyễn Thị Thanh Tâm, Nguyễn Văn Nghĩa, Trần Anh Tuấn (2017), *Giáo trình Đại số sơ cấp*, NXB Đại học Thái Nguyên.

[4] Đoàn Quỳnh (2005), *Giáo trình Đại số tuyến tính và hình học giải tích*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[5] Lê Đình Thúy (2007), *Toán cao cấp cho các nhà kinh tế, phần I: Đại số tuyến tính*, NXB Đại học Kinh tế Quốc dân, Hà Nội.