

THIẾT KẾ BẢN ĐỒ BAY AN TOÀN CHO THIẾT BỊ BAY KHÔNG NGƯỜI LÁI (DRONE) QUA DẠY HỌC HÌNH HỌC 12 THEO ĐỊNH HƯỚNG GIÁO DỤC STEAM

HOÀNG ANH KHOA
NGUYỄN VĂN THIÊN PHÚ
NGUYỄN MINH TRANG
Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm,
Đại học Đà Nẵng

Nhận bài ngày 08/5/2026. Sửa chữa xong 08/6/2026. Duyệt đăng 12/6/2026.

Abstract

This article examines the design of an integrated learning topic oriented toward STEAM education for 12th-grade students through the project "Designing a Safe Flight Path Map for Unmanned Aerial Vehicles (drone)". Utilizing theoretical research and mathematical modeling methods, the article proposes a 4-step pedagogical process that guides students in applying their knowledge of the Oxyz space coordinate system to solve urban air traffic safety challenges under idealized conditions. The project employs GeoGebra 3D software as a "virtual laboratory," enabling students to model real-world spatial environments and engage in a "trial-and-error" engineering mindset to optimize and correct obstacle-avoidance flight trajectories. The results confirm the feasibility of this topic in extracurricular activities, which not only generates an intuitive digital learning product but also effectively develops mathematical modeling skills and real-world problem-solving competencies for high school students.

Keywords: GeoGebra 3D, mathematical modeling, space coordinate method, STEAM education, Unmanned Aerial Vehicle (drone).

1. Đặt vấn đề

Cũng như các đối tượng toán học khác, các đối tượng hình học không gian (HHKG) mang tính trừu tượng. Điều này khiến HS gặp nhiều khó khăn trong quá trình học tập. Mặc dù trực quan hóa đóng vai trò quan trọng trong dạy học HHKG, việc lựa chọn công cụ hỗ trợ phù hợp vẫn còn là một thách thức (Pamungkas, M. D., Rahmawati, F., & Dinara, H. A., 2019). Hiện nay, dạy học HHKG không chỉ hướng đến việc hình thành kiến thức mà còn chú trọng phát triển trí tưởng tượng không gian cho HS. Đồng thời, quá trình này còn góp phần hình thành trực giác hình học, kĩ năng đồ họa, khả năng ước lượng không gian và năng lực kết nối giữa không gian thực với không gian toán học lý tưởng. Điều này đặt ra những tình huống sư phạm cho giáo viên (GV) trong việc giảng dạy phần HHKG. GV cần phải hiểu rõ các khó khăn mà HS hay gặp phải đồng thời xây dựng phương pháp giảng dạy phù hợp để có thể giúp đỡ HS vượt qua rào cản từ không gian thực sang không gian lý tưởng (Lê Hồng Thái, Phạm Sỹ Nam, 2022). Việc thiết kế bản đồ lộ trình bay an toàn cho thiết bị bay không người lái (drone) theo định hướng giáo dục STEAM ở trường trung học phổ thông (THPT) là một giải pháp tiếp cận dạy học tích hợp liên môn và rèn luyện kĩ năng thiết yếu. Hoạt động này tạo ra sự kết hợp hài hòa giữa các lĩnh vực Khoa học, Công nghệ, Kỹ thuật, Nghệ thuật khai phóng và đặc biệt là Toán học, giúp HS vận dụng tư duy hình học để giải quyết các thách thức khác nhau trong thực tiễn. Bài viết tiến hành tìm kiếm, tổng hợp tài liệu và phân tích hệ thống cơ sở lý luận có liên quan đến việc ứng dụng công nghệ drone trong giáo dục STEAM, từ đó nghiên cứu phương thức thiết kế và tổ chức thực hiện các dự án học tập gắn liền với định hướng giáo dục STEAM trong dạy học Hình học lớp 12 nói riêng và chương trình Toán học phổ thông

Email:

hiện nay nói chung. Từ đó, bằng phương pháp nghiên cứu tổng hợp và mô hình hóa toán học, bài viết đề xuất định hướng xây dựng chủ đề Phương pháp tọa độ trong không gian trong dạy học Hình học ở lớp 12 thông qua hai nội dung trọng tâm: Tính toán khoảng cách an toàn và Kiểm tra va chạm trong không gian Oxyz.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Dạy học tích hợp

Tích hợp là sự hợp nhất hay nhất thể hóa các bộ phận khác nhau để đưa đến một đối tượng mới như là một thể thống nhất dựa trên những nét bản chất của các thành phần đối tượng chứ không phải là phép cộng giản đơn của các thành phần ấy. Như vậy, tích hợp có hai tính chất cơ bản, liên hệ mật thiết với nhau và quy định lẫn nhau, đó là tính liên kết và tính toàn vẹn (Đỗ Thu Trà và cộng sự, 2023). Dạy học tích hợp là một hành động liên kết một cách hữu cơ, có hệ thống các đối tượng nghiên cứu, học tập của một vài lĩnh vực môn học khác nhau thành nội dung thống nhất, dựa trên cơ sở các mối liên hệ về lí luận và thực tiễn được đề cập trong các môn học đó, tránh nhấn quá mạnh hoặc quá sớm sự sai khác giữa các lĩnh vực với nhau. Như vậy, dạy học tích hợp là một quan điểm sư phạm, ở đó người học cần huy động (mọi) nguồn lực để giải quyết một vấn đề phức hợp trong môn Toán - nhằm phát triển các năng lực và phẩm chất cá nhân (Đỗ Thu Trà và cộng sự, 2023).

2.2. Giáo dục STEAM

STEAM là thuật ngữ bắt nguồn từ STEM - được giới thiệu vào năm 2001 bởi Quỹ Khoa học Quốc gia Hoa Kỳ (NSF), là viết tắt của (Science), Công nghệ (Technology), Kỹ thuật (Engineering) và Toán học (Mathematics). Nhưng sau đó các nhà giáo dục nhận ra có sự hạn chế nhất định trong mô hình giáo dục STEM, và STEAM ra đời với yếu tố Nghệ thuật khai phóng (Art - Liberal) nhằm bổ khuyết cho mô hình này. Thuật ngữ STEAM được sử dụng để thể hiện sự tích hợp nhằm phát triển và ứng dụng kết quả đến từ các lĩnh vực về Khoa học, Công nghệ, Kỹ thuật, Nghệ thuật khai phóng và Toán học. Bên cạnh đó, thuật ngữ STEAM còn được dùng để thể hiện các công việc hay ngành nghề mà các yếu tố trên được ứng dụng hay rộng hơn là về giáo dục STEAM (Phạm Diệu Linh, 2022). Giáo dục STEAM được hiểu là mô hình giáo dục dựa trên cách tiếp cận liên môn, giúp HS áp dụng các kiến thức Khoa học, Công nghệ, Kỹ thuật, Nghệ thuật khai phóng và Toán học, kết hợp với kiến thức khoa học xã hội vào giải quyết vấn đề thực tiễn trong bối cảnh cụ thể, trong đó đề cao yếu tố nghệ thuật khai phóng nhằm giúp người học thích nghi với sự phát triển của khoa học và công nghệ (Nguyễn Thanh Nga, Tạ Thanh Trung, 2021). Giáo dục STEAM được xem là một phương pháp tiếp cận liên ngành hiện đại, trong đó các ranh giới phân tách giữa năm lĩnh vực cốt lõi vốn tồn tại trong giáo dục truyền thống được thu hẹp đáng kể. Thay vì giảng dạy các môn học một cách rời rạc, mô hình này giúp HS thiết lập mối liên hệ mật thiết giữa nội dung bài học và các tình huống thực tiễn. Xuất phát từ Hoa Kỳ và nhanh chóng trở thành xu hướng giáo dục chủ đạo tại nhiều quốc gia (Maeda, J., 2013), STEAM đặc biệt nhấn mạnh vào sự tương tác giữa nền tảng lý thuyết và hoạt động thực hành. Đây không chỉ là sự thay đổi về phương pháp mà còn là một bước chuyển mình mang tính chiến lược sang giáo dục định hướng phát triển năng lực, tạo điều kiện để người học vận dụng tư duy khoa học vào việc giải quyết các vấn đề thực tế.

2.3. Thiết bị bay không người lái (drone)

Drone (Unmanned Aerial Vehicle – UAV) là thiết bị bay có khả năng hoạt động mà không cần người điều khiển trực tiếp trên khoang lái. Trong kỷ nguyên hiện đại, drone không chỉ dừng lại ở vai trò một thiết bị công nghệ mà đã trở thành công cụ đa năng với khả năng ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực. Trong nghiên cứu này, drone không được xem là đối tượng nghiên cứu công nghệ mà được sử dụng như một bối cảnh thực tiễn nhằm xây dựng các tình huống học tập gắn với nội dung Hình học không gian lớp 12.

2.4. Những nội dung hình học không gian 12 tạo cơ sở cho việc thiết kế bản đồ bay an toàn cho thiết bị bay không người lái (drone) theo định hướng giáo dục STEAM

Chương trình Hình học lớp 12 bao gồm nhiều nội dung có khả năng khai thác trong các tình huống

mô hình hóa và ứng dụng thực tiễn, đặc biệt là các chủ đề “Phương pháp tọa độ trong không gian Oxyz”, “Phương trình đường thẳng và mặt phẳng”, “Mặt cầu” và “Các khối tròn xoay” (Hà Huy Khoái và cộng sự, 2024). Đây là nền tảng quan trọng để tổ chức các hoạt động học tập theo định hướng giáo dục STEAM, trong đó HS vận dụng kiến thức toán học nhằm giải quyết các vấn đề thực tiễn gắn với thiết kế lộ trình bay an toàn cho thiết bị bay không người lái (drone). Trong quá trình triển khai chủ đề, không gian đô thị được mô hình hóa trên hệ trục tọa độ Oxyz. Đây là quá trình chuyển đổi một tình huống thực tiễn thành mô hình toán học để phân tích và giải quyết bằng các công cụ hình học giải tích trong không gian (Blum, W., & Ferri, R. B., 2009). Các công trình kiến trúc và vùng hạn chế bay được biểu diễn bằng các đối tượng hình học như mặt phẳng, mặt cầu và hệ bất phương trình trong không gian. Từ đó, HS vận dụng kiến thức hình học giải tích để xác định vị trí tương đối giữa các đối tượng, tính toán khoảng cách an toàn và thiết kế quỹ đạo bay phù hợp. Thông qua hoạt động này, các khái niệm và phương trình HHKG không còn tồn tại dưới dạng kiến thức trừu tượng mà được biểu diễn trên môi trường mô phỏng 3D bằng phần mềm GeoGebra, qua đó hỗ trợ trực quan hóa các đối tượng hình học trong không gian và tạo điều kiện cho HS quan sát mối liên hệ giữa mô hình toán học với bối cảnh thực tiễn (Hohenwarter, M., & Fuchs, K., 2004).

2.5. Quy trình thiết kế bản đồ bay an toàn cho thiết bị bay không người lái (drone) theo định hướng giáo dục STEAM

2.5.1. Nguyên tắc thiết kế bản đồ bay an toàn cho thiết bị bay không người lái (drone) theo định hướng giáo dục STEAM

Nguyên tắc thiết kế phải đảm bảo một số tiêu chí: Đảm bảo mục tiêu dạy học, đảm bảo tính khoa học và chính xác, đảm bảo tính sư phạm, đảm bảo tính an toàn, đảm bảo tính thực tiễn,...

2.5.2. Quy trình thiết kế chủ đề theo định hướng giáo dục STEAM

Để thiết kế mô hình theo định hướng giáo dục STEAM nói chung, thiết kế bản đồ bay an toàn cho thiết bị bay không người lái (drone) nói riêng, cần thực hiện theo 4 bước: *Bước 1:* Lựa chọn chủ đề thiết kế: Căn cứ vào nội dung kiến thức trong chương trình Hình học 12 bao gồm Phương pháp tọa độ trong không gian Oxyz, tập trung vào phương trình đường thẳng, mặt phẳng và các bài toán khoảng cách,... để xác định chủ đề thiết kế. *Bước 2:* Xây dựng tiêu chí của thiết kế: Sau khi xác định các vấn đề của sản phẩm, cần xác lập các tiêu chí kĩ thuật làm căn cứ để đề xuất giả thuyết khoa học và giải pháp kĩ thuật. Các tiêu chí không chỉ tập trung vào kết quả mô hình bản đồ bay mà phải hướng tới việc định hướng quá trình học tập và vận dụng kiến thức nền của HS. Đối với bản đồ bay, tiêu chí quan trọng nhất là tính chính xác của tọa độ và sự đảm bảo về khoảng cách an toàn toán học giữa quỹ đạo và vật cản. *Bước 3:* Xác định vấn đề cần thiết kế: Sau khi chọn chủ đề, cần xác định vấn đề cụ thể để giao cho HS thực hiện sao cho thông qua việc thiết kế, HS đạt được các kiến thức và kĩ năng mục tiêu hoặc vận dụng những kiến thức và kĩ năng đã biết để xây dựng bài học; trong quá trình này, giáo viên (GV) cần hình dung trước các khó khăn mà HS có thể gặp phải như: Những kiến thức liên quan, quá trình thực hiện, xây dựng ý tưởng, cơ hội vận dụng kiến thức để giải quyết các vấn đề cũng như xác định được đúng đắn tiêu chí của mô hình bản đồ bay. *Bước 4:* Thiết kế tiến trình tổ chức hoạt động dạy học: Mỗi hoạt động học cần được thiết kế rõ ràng về mục đích, nội dung và sản phẩm học tập mà HS phải hoàn thành. Các hoạt động này có thể được tổ chức linh hoạt cả ở trong và ngoài lớp học. Đặc biệt, cần chú trọng thiết kế các học liệu điện tử hoặc sử dụng phần mềm toán học (như GeoGebra 3D) trên mạng để hướng dẫn và hỗ trợ hoạt động tự học, tự nghiên cứu của HS bên ngoài không gian lớp học truyền thống.

2.5.3. Thiết kế bản đồ bay an toàn cho thiết bị bay không người lái (drone) theo định hướng giáo dục STEAM bằng Geogebra 3D

Chuẩn bị: Hệ thống máy tính có kết nối Internet và cài đặt phần mềm GeoGebra 3D; bản vẽ giả lập một cụm kiến trúc đô thị gồm các tòa nhà có dạng khối hộp chữ nhật và các vùng hạn chế bay (No-fly zones); bảng thông số kĩ thuật: tọa độ điểm cất cánh S, điểm hạ cánh G, và bán kính an toàn tối thiểu R; phiếu học tập hướng dẫn thiết lập phương trình mặt phẳng và kiểm tra vị trí tương đối giữa đường

thẳng và vật cản. Quy trình thiết kế bản đồ bay an toàn cho drone:

Bước 1: Lựa chọn chủ đề thiết kế mô hình: Thiết kế lộ trình vận chuyển hàng hóa tự động cho drone trong khu vực đô thị giả lập. HS thực hiện thiết lập hệ trục tọa độ O_{xyz} sao cho mặt đất trùng với mặt phẳng Oxy , các tòa nhà được định vị tọa độ các đỉnh dựa trên đơn vị mét (m) thực tế.

Bước 2: Xây dựng tiêu chí của thiết kế mô hình (bản đồ phải mô hình hóa chính xác các vật cản dưới dạng các mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$; Lộ trình bay là một đường gấp khúc nối các điểm nút W (Waypoints); Tiêu chí an toàn: tại mọi vị trí M trên quỹ đạo, khoảng cách đến các mặt phẳng biên của vật cản phải thỏa mãn $d(M, (\alpha)) > R$; Tính tối ưu: Quỹ đạo bay tổng cộng là ngắn nhất và không cắt qua các vùng cấm; bản đồ được thiết kế phù hợp, trực quan và tiện cận với không gian thực tế; trang trí sáng tạo, hài hòa;...).

Bước 3: Xác định vấn đề cần thiết kế mô hình: Để thiết kế được bản đồ bay an toàn cho drone trong cụm đô thị giả lập, GV đặt ra cho HS hai bài toán thiết kế kỹ thuật từ cơ bản đến nâng cao. HS phải huy động các kiến thức nền về phương trình đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu để tìm giải pháp hình học trên phần mềm GeoGebra 3D trong điều kiện lý tưởng hóa (coi drone là một điểm chuyển động và bỏ qua các yếu tố ngoại cảnh).

a. Thiết kế lộ trình chuyển hướng tránh vật cản kiến trúc (khối hộp chữ nhật)

- Vấn đề kĩ thuật: Giả định một tòa nhà có cấu trúc hình hộp chữ nhật có tọa độ 4 đỉnh đáy lần lượt là A, B, C, D và chiều cao h . drone cần di chuyển từ điểm cất cánh S đến điểm hạ cánh G nhưng đường thẳng nối liền SG không giao với miền không gian biểu diễn tòa nhà.

- Giải pháp toán học và công nghệ: HS cần xác định tọa độ các đỉnh phần mái là A', B', C', D' dựa vào chiều cao h . Từ đó, HS lập phương trình của các mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ của các bức tường bao quanh tòa nhà. Để tránh vật cản, HS phải tính toán tọa độ một điểm nút trung gian W nằm ngoài phạm vi tòa nhà, sao cho các đoạn thẳng quỹ đạo SW và WG không cắt khối hộp. HS thiết lập điều kiện biên an toàn: Tại mọi điểm M trên đường thẳng quỹ đạo, khoảng cách đến các mặt phẳng tường phải thỏa mãn $d(M, (\alpha)) > R$. HS sử dụng các lệnh dựng hình khối và đường thẳng trên GeoGebra 3D để mô phỏng trực quan.

- Sự tích hợp các lĩnh vực trong nhiệm vụ: **Khoa học (S):** Nhận biết bối cảnh an toàn không lưu đô thị; phân tích quy định về giới hạn khoảng cách an toàn tối thiểu giữa thiết bị bay và công trình kiến trúc để tránh va chạm vật lý. **Công nghệ (T):** Sử dụng các công cụ dựng hình khối 3D của phần mềm GeoGebra để số hóa cấu trúc kiến trúc từ thực tế vào môi trường giả lập. **Kĩ thuật (E):** Thực hiện quy trình thiết kế kỹ thuật: Bước 1: Nhận diện chướng ngại vật; Bước 2: Phát hiện lỗi va chạm; Bước 3: Hiệu chỉnh tham số tọa độ điểm nút để thiết kế quỹ đạo bay đảm bảo an toàn. **Nghệ thuật (A):** Thiết kế giao diện trực quan của mô hình số thông qua việc lựa chọn màu sắc, cách hiển thị đối tượng hình học và bố cục không gian nhằm hỗ trợ quá trình quan sát, trao đổi và trình bày sản phẩm học tập. **Toán học (M):** Vận dụng phương trình mặt phẳng (tường nhà), phương trình tham số đường thẳng (quỹ đạo) và công thức tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng trong hệ tọa độ O_{xyz} .

b. Thiết kế lộ trình tránh vùng hạn chế bay hình cầu (No-fly zone)

- Vấn đề kĩ thuật: Trong không gian đô thị xuất hiện một vùng hạn chế bay (vùng cấm) được mô hình hóa là một khối cầu tâm $I(x; y; z)$ và bán kính R' . Lộ trình bay thẳng của drone từ vị trí hiện tại đến điểm tiếp theo có nguy cơ đi xuyên vào vùng cấm này.

- Giải pháp toán học và công nghệ: HS lập phương trình mặt cầu giới hạn vùng cấm $(S): (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R'^2$. HS thiết lập phương trình đường thẳng d chứa quỹ đạo bay. Để đảm bảo an toàn, quỹ đạo d không được cắt mặt cầu (S) . HS xác lập điều kiện khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng quỹ đạo d đi qua điểm M và có vectơ

chỉ phương là $\mathbf{u}$ phải thỏa mãn: $d(I, d) = \frac{||\mathbf{IM}, \mathbf{u}||}{|\mathbf{u}|} > R + R'$. HS sử dụng công cụ tính khoảng cách tự động

và hàm điều kiện (If-Then) trên GeoGebra 3D để phần mềm tự động phát tín hiệu cảnh báo nếu quỹ đạo vi phạm vùng cấm.

Bước 4: Thiết kế tiến trình tổ chức hoạt động dạy học (dựa vào kế hoạch bài dạy theo hình thức trải nghiệm).

- **Hoạt động 1:** Giao nhiệm vụ thiết kế mô hình bản đồ bay và xác lập bối cảnh: GV đặt HS vào vai trò người thiết kế lộ trình bay. GV cung cấp phiếu học tập chứa dữ liệu tọa độ giả lập của cụm đô thị và các yêu cầu kỹ thuật biên (R, vùng cấm bay hình cầu). HS làm việc nhóm để phân tích nhiệm vụ, nhận diện các chương ngại vật kiến trúc và hình dung lộ trình bay lý tưởng ban đầu.

- **Hoạt động 2:** Nghiên cứu kiến thức (HHKG và hệ trục tọa độ Oxyz): HS tiến hành ôn tập và chiếm lĩnh các công cụ toán học cốt lõi. GV hướng dẫn HS hệ thống hóa cách lập phương trình mặt phẳng từ các đỉnh của khối hộp chữ nhật, cách chuyển đổi đường bay thành phương trình tham số của đường thẳng, và công thức tính khoảng cách. HS thực hiện các tính toán lý thuyết trên giấy để xác định tọa độ các điểm nút (Waypoints) dự kiến.

- **Hoạt động 3:** Trải nghiệm số hóa và thử nghiệm quỹ đạo trên GeoGebra 3D: GV tổ chức cho HS thực hành tại phòng máy tính hoặc sử dụng thiết bị cá nhân truy cập phần mềm GeoGebra 3D. HS nhập các phương trình tọa độ đã tính toán để dựng mô hình cụm đô thị ảo. Tiếp theo, HS tiến hành mô phỏng quỹ đạo bay của drone. Khi phần mềm hiển thị lỗi tương giao (đường thẳng quỹ đạo cắt qua khối hộp hoặc mặt cầu cấm bay), HS vận dụng tư duy kỹ thuật "thử và sai", sử dụng thanh trượt (slider) để hiệu chỉnh các tham số vectơ chỉ phương cho đến khi đạt được khoảng cách an toàn.

- **Hoạt động 4:** Triển lãm bản đồ bay, báo cáo và đánh giá sản phẩm: Các nhóm tiến hành xuất file mô phỏng hoặc ghi hình hành trình bay của drone trên nền tảng số. HS đại diện nhóm thuyết trình về giải pháp hình học của mình, chứng minh tính an toàn của lộ trình bằng các đại lượng khoảng cách toán học cụ thể. GV và các nhóm khác tiến hành phản biện, đánh giá sản phẩm dựa trên các tiêu chí kỹ thuật, độ tối ưu của quãng đường và tính thẩm mỹ trong đồ họa không gian 3D đã xác lập từ Bước 2.

3. Minh họa triển khai chủ đề “Thiết kế bản đồ bay an toàn cho thiết bị bay không người lái (drone)”

Để minh họa cho quy trình thiết kế chủ đề theo định hướng giáo dục STEAM đã đề xuất, chúng tôi xây dựng một tình huống học tập cụ thể liên quan đến việc thiết kế lộ trình bay an toàn cho drone trong môi trường đô thị giả lập.

3.1. Minh họa thiết kế lộ trình chuyển hướng tránh vật cản kiến trúc (khối hộp chữ nhật)

Nhằm cụ thể hóa quy trình, bài viết giả lập một tình huống sư phạm được triển khai tại hoạt động 1 và hoạt động 3 của tiến trình dạy học. Trên môi trường số GeoGebra 3D, không gian thực địa được số hóa với mặt đất trùng với mặt phẳng Oxy . Thiết bị drone nhận nhiệm vụ di chuyển theo đường thẳng từ điểm cất cánh $S(0;0;5)$ đến điểm hạ cánh $G(10;10;5)$ (đơn vị đo lường được quy ước là mét). Vật cản kiến trúc trong khu vực là một tòa nhà cao tầng có cấu trúc khối hộp chữ nhật với tọa độ bốn đỉnh đáy lần lượt là $A(2;4;0)$, $B(6;4;0)$, $C(6;8;0)$, $D(2;8;0)$ và chiều cao $h = 15m$. Biên an toàn kỹ thuật tối thiểu quy định là $R = 1m$. Trong quá trình thực hiện, tiến trình tư duy hình học và kỹ thuật của học sinh được diễn ra như sau:

Bước 1: Mô hình hóa toán học vật cản: Từ chiều cao $h = 15m$, học sinh xác định tọa độ các đỉnh phần mái tòa nhà là $A'(2;4;15)$, $B'(6;4;15)$, $C'(6;8;15)$, $D'(2;8;15)$. Bức tường đối diện với hướng bay ban đầu thuộc mặt phẳng $(ABB'A')$. Do mặt phẳng này đi qua $A(2;4;0)$, $B(6;4;0)$ và song song với mặt phẳng (Oxz) , HS thiết lập được phương trình tổng quát: $(a): y - 4 = 0$ (với điều kiện biên hình học: $2 \leq x \leq 6; 0 \leq z \leq 15$).

Bước 2: Phát hiện va chạm hình học (Thử nghiệm ban đầu): Quỹ đạo bay thẳng dự kiến SG từ $S(0;0;5)$ đến $G(10;10;5)$, tương ứng với phương trình tham số

$$(d): \begin{cases} x = t; \\ y = t; \\ z = 5 \end{cases}.$$

Xét phương trình tương giao giữa quỹ đạo (d) và mặt phẳng (a), HS thay $y = t$ vào phương trình mặt phẳng, thu được $t = 4$, suy ra tọa độ giao điểm $M(4; 4; 5)$. Vì $x = 4 (\in [2; 6])$ và $z = 5 (\in [0; 15])$ nên điểm M nằm trên chính bề mặt của vật cản kiến trúc. Điều đó chứng tỏ quỹ đạo bay thẳng SG cắt miền không gian biểu diễn tòa nhà tòa nhà và không đáp ứng yêu cầu an toàn. Trên môi trường GeoGebra 3D, lỗi va chạm được hiển thị trực quan thông qua chỉ thị đường bay màu đỏ.

Bước 3: Hiệu chỉnh tham số kỹ thuật: Áp dụng quy trình tư duy kỹ thuật "thử nghiệm và hiệu chỉnh", học sinh bề cong quỹ đạo thành đường gấp khúc bằng cách chèn điểm nút trung gian $W(x; y; z)$. Để dẫn hướng drone bay lệch sang phía bên phải, vượt ra ngoài giới hạn bề rộng của bức tường mặt trước (kết thúc tại $x = 6$) cũng như bức tường hông ($BCC'B'$) nằm trên mặt phẳng ($x = 6$), HS điều chỉnh thanh trượt (slider) trên phần mềm và lựa chọn tọa độ điểm nút trung gian phù hợp là $W(9; 3; 5)$. Khi đó quỹ đạo mới gồm hai đoạn là SW và WG .

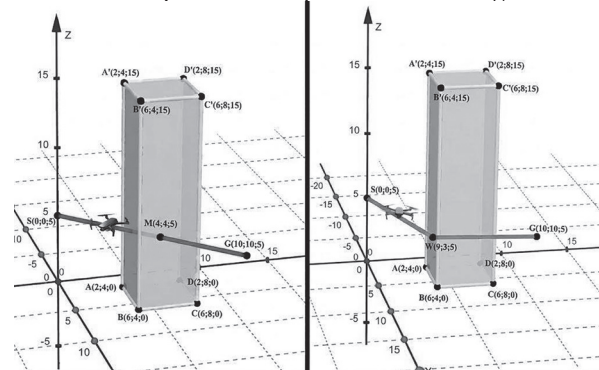
Bước 4: Kiểm chứng an toàn quỹ đạo: Đối với đoạn SW nối $S(0; 0; 5)$ và $W(9; 3; 5)$, hình chiếu của quỹ đạo lên mặt phẳng (Oxy) có phương trình (d'): $x - 3y = 0$. Có thể kiểm tra rằng điểm gần nhất của vật cản đến đường thẳng chứa đoạn SW là đỉnh $B(6; 4)$. Khoảng cách ngắn nhất từ phân đoạn này đến đỉnh $B(6; 4)$ được tính bằng công thức:

$$d(B, SW) = \frac{|6 - 3 \cdot 4|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} \approx 1,90m (> 1m),$$

nên đoạn bay này đảm bảo khoảng cách an toàn tối thiểu. Đối với đoạn WG nối $W(9; 3; 5)$ và $G(10; 10; 5)$, mọi điểm trên quỹ đạo đều có hoành độ thuộc khoảng $[9; 10]$ (nằm ngoài miền hoành độ $[2; 6]$ của tòa nhà). Suy ra mọi điểm của đoạn WG đều nằm hoàn toàn ngoài miền không gian của vật cản kiến trúc, do đó không tồn tại nguy cơ va chạm.

Kết quả, hệ thống mô phỏng trên GeoGebra 3D chuyển sang màu xanh, xác nhận quỹ đạo gấp khúc SWG đã đáp ứng yêu cầu an toàn kỹ thuật và phù hợp với các tiêu chí thiết kế đã đặt ra.

Hình: Thiết kế lộ trình tránh vật cản kiến trúc bằng GeoGebra 3D



3.2. Minh họa thiết kế lộ trình tránh vùng hạn chế bay hình cầu (No-fly zone)

Để minh họa cho bài toán hình học giải tích nâng cao, giáo viên thiết lập bối cảnh không lưu xuất hiện một vùng hạn chế bay cố định (No-fly zone) do trạm phát sóng radar đô thị tạo ra. Thiết bị Drone nhận nhiệm vụ vận chuyển từ vị trí hiện tại $S(0; 0; 10)$ đến điểm đích tiếp theo $G(20; 20; 10)$. Vùng cấm bay được mô hình hóa trong không gian ($Oxyz$) là một khối cầu (S) có tâm $I(10; 8; 10)$ và bán kính quy ước $R' = 4m$, biên an toàn kỹ thuật của thiết bị bay là $R = 1m$.

Giải pháp toán học và công nghệ được HS triển khai cụ thể thông qua quy trình gồm các bước sau:

Bước 1: Mô hình hóa toán học miền không gian cấm bay: Vận dụng kiến thức về phương trình mặt cầu, HS thiết lập phương trình giới hạn của vùng hạn chế bay (S) dưới dạng: $(S): (x - 10)^2 + (y - 8)^2 + (z - 10)^2 = 16$.

Bước 2: Đường bay thẳng dự kiến ban đầu nằm trên đường thẳng (d) đi qua $S(0; 0; 10)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (20; 20; 0) = 20(1; 1; 0)$, suy ra vectơ chỉ phương rút gọn $\vec{u}' = (1; 1; 0)$ và phương trình tham số:

$$(d): \begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = 10 \end{cases}.$$

Để xét vị trí tương đối giữa quỹ đạo và vùng cấm, HS tính khoảng cách từ tâm mặt cầu I đến đường thẳng quỹ đạo d bằng công thức:

$$d(I, d) = \frac{|\overline{IS}, \vec{u}'|}{|\vec{u}'|}.$$

Với vectơ vị trí $\overline{IS} = (-10; -8; 0)$, tích có hướng $[\overline{IS}, \vec{u}'] = (0; 0; -2)$, từ đó tính được khoảng cách là $d(I, d) = \sqrt{2} \approx 1,41m$. Trong khi đó, điều kiện an toàn yêu cầu: $d(I, d) > R' + R = 4 + 1 = 5m$. Do $1,41m < 5m$, quỹ đạo thẳng vi phạm vùng cấm, hệ thống trên phần mềm GeoGebra 3D lập tức hiển thị cảnh báo và chạm màu đỏ.

Bước 3: Thực hành thử nghiệm và hiệu chỉnh quỹ đạo: Để khắc phục nguy cơ va chạm, HS áp dụng quy trình thử nghiệm – hiệu chỉnh, sử dụng các thanh trượt tham số (slider) trên môi trường số nhằm chèn một điểm nút trung gian $W(x; y; z)$. Mục tiêu là điều chỉnh quỹ đạo lệch sang bên trái đồng thời tăng độ cao để đảm bảo khoảng cách an toàn với mặt cầu cấm bay. Qua quá trình thử nghiệm và tính toán hình học, tọa độ điểm nút được lựa chọn là $W(5; 15; 14)$. Khi đó quỹ đạo mới gồm hai đoạn SW và WG .

Bước 4: Kiểm chứng an toàn quỹ đạo: Đối với đoạn SW nối $S(0; 0; 10)$ và $W(5; 15; 14)$, đường thẳng SW có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (5; 15; 4)$, tích có hướng $[\overline{SW}, \vec{u}_1] = (32; -40; 110)$. Khoảng cách từ tâm vùng cấm I đến đường thẳng SW được xác định bởi:

$$d(I, SW) = \frac{|\overline{SW}, \vec{u}_1|}{|\vec{u}_1|} = \frac{\sqrt{14724}}{\sqrt{266}} \approx 7,44m (> 5m),$$

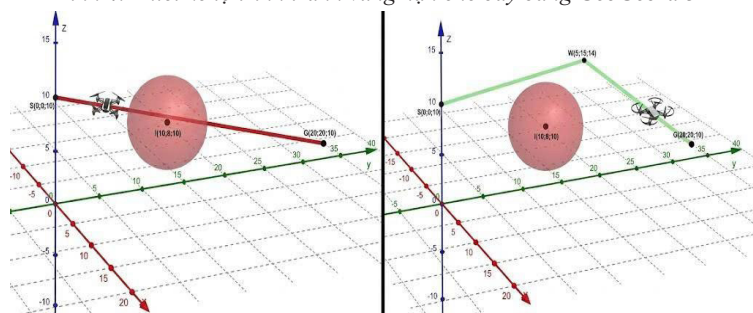
do đó đoạn SW đảm bảo khoảng cách an toàn.

Đối với đoạn WG nối $W(5; 15; 14)$ và $G(20; 20; 10)$, đường thẳng WG có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (15; 5; -4)$, tích có hướng $[\overline{WI}, \vec{u}_2] = (48; -40; 130)$. Khoảng cách từ tâm vùng cấm I đến đường thẳng WG được xác định bởi:

$$d(I, WG) = \frac{|\overline{WI}, \vec{u}_2|}{|\vec{u}_2|} = \frac{\sqrt{20804}}{\sqrt{266}} \approx 8,84m (> 5m), \text{ do đó đoạn } WG \text{ cũng đảm bảo khoảng cách an toàn.}$$

Kết quả tính toán cho thấy quỹ đạo gấp khúc SWG đáp ứng yêu cầu an toàn kỹ thuật và loại bỏ nguy cơ va chạm với vùng hạn chế bay. Trên giao diện trực quan của phần mềm GeoGebra 3D, toàn bộ lộ trình được hiển thị bằng màu xanh, giúp HS quan sát và đánh giá trực tiếp hiệu quả của phương án thiết kế trước khi hoàn thiện sản phẩm số để báo cáo kết quả học tập.

Hình 4. Thiết kế lộ trình tránh vùng hạn chế bay bằng GeoGebra 3D



Bảng 1 trình bày các khái niệm, công cụ toán học và năng lực HS có cơ hội vận dụng trong quá trình giải quyết từng nhiệm vụ học tập.

Bảng 1: Mối liên hệ giữa các tình huống mô phỏng và nội dung môn Toán trong chương trình lớp 12

Tình huống mô phỏng	Nội dung Toán 12	Hoạt động của học sinh
Thiết kế lộ trình tránh vật cản kiến trúc dạng khối hộp chữ nhật	Phương trình đường thẳng trong không gian; phương trình mặt phẳng; vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng; khoảng cách trong không gian	Mô hình hóa vật cản, xác định giao điểm giữa quỹ đạo và vật cản, hiệu chỉnh lộ trình và kiểm chứng điều kiện an toàn
Thiết kế lộ trình tránh vùng hạn chế bay dạng mặt cầu	Phương trình mặt cầu; khoảng cách từ điểm đến đường thẳng trong không gian; vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu	Xác định nguy cơ xâm nhập vùng cấm bay, tính toán khoảng cách an toàn và xây dựng quỹ đạo thay thế
Hiệu chỉnh quỹ đạo bằng điểm nút trung gian	Vector chỉ phương; phương trình tham số của đường thẳng; mô hình hóa toán học	Thử nghiệm các phương án thiết kế, điều chỉnh tham số và lựa chọn phương án phù hợp
Mô phỏng và kiểm chứng trên GeoGebra 3D	Biểu diễn hình học không gian trên môi trường số; trực quan hóa mô hình toán học	Quan sát mô hình, kiểm tra giả thuyết và đánh giá kết quả thông qua biểu diễn trực quan

4. Kết luận

Bài báo đã đề xuất một quy trình tổ chức dạy học HHKG lớp 12 theo định hướng STEAM thông qua việc khai thác các tình huống điều hướng Drone trên môi trường GeoGebra 3D. Trên cơ sở tích hợp các thành tố Khoa học, Công nghệ, Kỹ thuật, Nghệ thuật khai phóng và Toán học, quy trình được xây dựng nhằm tạo ra các nhiệm vụ học tập gắn với bối cảnh thực tiễn, qua đó hỗ trợ việc vận dụng kiến thức tọa độ trong không gian vào giải quyết các bài toán mô hình hóa. Các tình huống minh họa được trình bày trong bài báo cho thấy khả năng khai thác GeoGebra 3D như một công cụ hỗ trợ trực quan hóa các đối tượng hình học không gian, đồng thời tạo điều kiện để HS tiếp cận mối liên hệ giữa kiến thức toán học và các bài toán ứng dụng trong môi trường số. Kết quả nghiên cứu góp phần bổ sung một gợi ý về tổ chức dạy học hình học không gian theo định hướng STEAM ở trường phổ thông, đồng thời cung cấp cho GV một số định hướng trong việc thiết kế các hoạt động học tập tích hợp công nghệ số và mô hình hóa toán học. Nghiên cứu cũng mở ra khả năng tiếp tục phát triển các chủ đề dạy học STEAM khác dựa trên nền tảng GeoGebra 3D và các bối cảnh ứng dụng gắn với thực tiễn.

Tài liệu tham khảo

- Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45–58.
- Đỗ Hương Trà (chủ biên) và cộng sự (2023). *Dạy học tích hợp phát triển năng lực học sinh* (Quyển 1 - Khoa học tự nhiên), NXB Đại học Sư phạm.
- Hà Huy Khoái (tổng chủ biên) và cộng sự (2024). *Toán 12* (tập 1, tập 2 - Bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống), NXB Giáo dục Việt Nam.
- Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2004). *Combination of Dynamic Geometry, Algebra and Calculus in the Software System GeoGebra*. Proceedings of the Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference.
- Lê Hồng Thái, Phạm Sỹ Nam (2022). Một số định hướng trong dạy học Hình học không gian ở trung học phổ thông. *Tạp chí Khoa học Giáo dục Việt Nam*.
- Maeda, J. (2013). *STEM + Art = STEAM*, The STEAM Journal, 1(1), Article 34.
- Nguyễn Thanh Nga, Tạ Thanh Trung (2021). Giáo dục STEAM và tiềm năng vận dụng quy trình tư duy thiết kế để triển khai giáo dục STEAM. *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh*, tập 18, số 2.
- Pamungkas, M. D., Rahmawati, F., & Dinara, H. A. (2019). Integrating GeoGebra into Space Geometry in College. In Proceedings of the 3rd International Conference on Learning Innovation and Quality Education (ICLIQE 2019). *Advances in Social Science, Education and Humanities Research*, Vol. 397, pp. 999–1006.
- Phạm Diệu Linh (2022). Vai trò của nghệ thuật trong phương pháp giáo dục STEAM, *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, tập 11, số 3.