ỨNG DỤNG PHẦN MỀM GEOGEBRA ĐỂ TRỰC QUAN HÓA DẠY HỌC ĐỊNH LÝ "ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG" TRONG CHƯƠNG TRÌNH MÔN TOÁN LỚP 11

HỒ THỊ MINH PHƯƠNG
LÊ THÀNH ĐÔ
PHÙNG GIA BẢO
ĐẶNG HỮU BÌNH
HUỲNH THỊ ÁNH NGỌC
Trường Đại học Quy Nhơn

Nhận bài ngày 20/02/2025. Sửa chữa xong 28/02/2025. Duyệt đăng 03/3/2025.

Abstract

Visual-based teaching plays a crucial role in developing students' mathematical thinking, with GeoGebra, especially its 3D version, offering an interactive and intuitive way to visualize concepts and theorems. This paper explores the connection between GeoGebra and geometry, clarifying the requirements for using the software to support geometry teaching. It further demonstrates how GeoGebra can be used to visualize the theorem "Condition for a line to be perpendicular to a plane," allowing students to analyze geometric relationships from different perspectives. Lastly, the paper provides conclusions and recommendations to optimize the application of GeoGebra in mathematics teaching.

Keywords: *Visualization, geogebra software, geometry, theorem, a line perpendicular to a plane.*

1. Đặt vấn đề

Hình học không gian là một trong những nội dung quan trọng trong chương trình Toán học lớp 11. Trong đó, định lý về đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đóng vai trò nền tảng, giúp học sinh (HS) hiểu rõ hơn về quan hệ vuông góc trong không gian và làm cơ sở cho các bài toán Hình học phức tạp hơn. Tuy nhiên, một trong những thách thức lớn đối với HS là khả năng tưởng tượng và trực quan hóa các đối tượng không gian, đặc biệt khi chỉ sử dụng các hình vẽ 2D trên giấy hoặc trên bảng. Thực tế, nhiều HS gặp khó khăn khi tiếp cận các kiến thức về hình học không gian bởi tính trừu tượng cao của những khái niệm. Các bài giảng truyền thống thường chỉ dựa trên hình vẽ tĩnh, dẫn đến việc HS không thể quan sát và tương tác với các đối tượng hình học một cách linh hoạt. Điều này không chỉ ảnh hưởng đến khả năng tiếp thu bài học mà còn khiến HS dễ mắc sai lầm trong lập luận và chứng minh hình học. Do đó, việc tìm kiếm các phương pháp giảng dạy hiệu quả hơn để hỗ trợ HS trực quan hóa kiến thức là rất cần thiết.

GeoGebra là một phần mềm miễn phí, tích hợp mạnh mẽ giữa hình học, đại số và bảng tính, cho phép người dùng dễ dàng tạo ra các mô hình tĩnh và động, giúp HS tiếp cận kiến thức một cách sinh động và trực quan hơn. Trên thế giới đã có nhiều nghiên cứu chuyên sâu về việc ứng dụng GeoGebra trong giảng dạy Toán học, đặc biệt ở các nội dung liên quan đến hình học không gian [1], [2], [3]. Tại Việt Nam, tuy cũng đã xuất hiện một số công trình nghiên cứu tập trung vào dạy học Hình học không gian lớp 11 và ứng dụng phần mềm hình học động GeoGebra [4], [5] nhưng nội dung liên quan đến định lý về điều kiện đường thẳng vuông góc với mặt phẳng vẫn chưa được khai thác triệt để. Thực tế này đặt ra nhu cầu cần thiết về việc nghiên cứu và nâng cao kỹ năng ứng dụng GeoGebra cho cả giáo viên (GV) và HS, minh họa việc sử dụng Geogebra trong dạy học một nội dung cụ thể, từ đó làm nền

Email: htmphuong@qnu.edu.vn

tảng cho các nghiên cứu dạy học hiệu quả tương tự và đáp ứng yêu cầu đổi mới của Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Quan hệ giữa GeoGebra và toán hình học

GeoGebra là phần mềm toán học động, hỗ trợ việc học và dạy các phân nhánh của môn Toán như Hình học, Đại số, Giải tích và Thống kê. Với ưu điểm biểu diễn trực quan được nhiều đối tượng, GeoGebra giúp minh họa định lý, dựng hình và khám phá tính chất qua các hoạt động tương tác trong môn Hình học. Cụ thể, Geogebra có thể dùng để dựng các hình khối như hình chóp, lăng trụ, mặt phẳng và đường thẳng trong không gian ba chiều (3D). Người dùng có thể xoay, phóng to, thu nhỏ và quan sát từ nhiều góc độ để hiểu rõ cấu trúc hình học. Hơn nữa, GeoGebra còn giúp kiểm tra vị trí tương đối giữa các đối tượng như đường thẳng song song, cắt nhau hoặc chéo nhau; tính khoảng cách giữa điểm, đường và mặt phẳng cũng như xác định góc giữa các đối tượng, hỗ trợ dựng hình chiếu vuông góc, giao tuyến của mặt phẳng và mô phỏng tính chất hình học.

Qua việc phân tích kỹ lưỡng chương trình Hình học không gian lớp 11 và khám phá các tính năng của GeoGebra, chúng tôi đề xuất một số nội dung phù hợp để ứng dụng phần mềm này vào dạy học Hình học.

2.1.1. Về khái niệm

Góc giữa hai đường thẳng: HS thường nhầm lẫn về vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian, dẫn đến khó xác định góc giữa chúng. GeoGebra giúp trực quan hóa vị trí và hỗ trợ cách xác định góc dễ dàng hơn.

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng và góc giữa hai mặt phẳng: Việc hình dung một đường thẳng vuông góc với tất cả các đường thẳng nằm trên một mặt phẳng là khá khó khăn đối với HS. GeoGebra cung cấp công cụ đo góc, giúp HS nhận diện mối quan hệ về góc giữa các đường thẳng, dựa vào cách xác định số đo góc để nhận biết đường thẳng có vuông góc với đường thẳng và đường thẳng có vuông góc với mặt phẳng hay không cũng như cách xác định góc giữa hai mặt phẳng một cách trực quan.

Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng: Là khoảng cách ngắn nhất. GeoGebra giúp minh họa trực tiếp quá trình xác định điểm gần nhất, giúp HS hiểu rõ bản chất đoạn vuông góc

2.1.2. Về định lý

Một số định lý hình học lớp 11 có thể sử dụng GeoGebra hỗ trợ dạy học hiệu quả. Chẳng hạn, định lý về đường thẳng vuông góc với mặt phẳng "*Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy*". Định lý hai mặt phẳng vuông góc: "*Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là hai mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia*". Định lý quan hệ vuông góc liên quan đến giao tuyến hai mặt phẳng "*Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó*". GV có thể sử dụng tính năng đo góc của Geogebra để xây dựng những kịch bản sư phạm phù hợp, giúp HS khẳng định tính đúng đắn của định lý, tiếp cận và hình thành các định lý.

2.2. Yêu cầu của việc sử dụng phương tiện trực quan hóa trong dạy học Hình học 11

Hiện nay, phần mềm hỗ trợ dạy học trực quan đã trở nên phổ biến và đa dạng. Để lựa chọn được một phần mềm hỗ trợ dạy học phù hợp chúng ta cần xem xét các yếu tố.

Tính mở: Phần mềm cho phép GV tùy chỉnh nội dung, giao diện và hoạt động dạy học để phù hợp với từng đối tượng HS. Đồng thời, tạo điều kiện cho HS có thể chủ động khám phá, phát huy tư duy sáng tạo và phát triển kỹ năng giải quyết vấn đề.

Khả năng tương tác: Phần mềm tốt giúp HS chủ động tiếp cận kiến thức thay vì thụ động tiếp nhận thông tin. Các mô phỏng thực tế giúp HS liên hệ kiến thức với đời sống, tăng khả năng tập trung và ghi nhớ.

Giao diện thân thiện: Giao diện trực quan, dễ sử dụng giúp GV và HS tiếp cận nhanh chóng. Hình ảnh sinh động góp phần thu hút sự chú ý và tạo động lực học tập.

Từ các tiêu chí trên, phần mềm hỗ trợ dạy học Hình học lớp 11 cần đảm bảo hai yêu cầu: 1) Thể hiện chính xác mối quan hệ hình học trong không gian, đặc biệt là các hình động 2D, 3D; 2) Cho phép HS dễ dàng sử dụng, tương tác trực tiếp, giúp tự khám phá và hiểu sâu kiến thức. Với những lợi ích này, GeoGebra là phần mềm tiềm năng đáp ứng tốt hai yêu cầu trên trong dạy học Hình học.

2.3. Minh họa cách thức sử dụng phần mềm Geogebra trong trực quan hóa dạy học định lý "Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng"

Tham khảo nghiên cứu của nhóm tác giả Nguyễn Ngọc Giang và cộng sự (2023), nhóm nghiên cứu đã đề xuất quy trình sử dụng GeoGebra hỗ trợ dạy học trực quan gồm 5 bước sau: *Bước 1:* Xem xét và xác định khả năng sử dụng công cụ, phương tiện học toán Geogebra trong việc giải quyết bài toán; *Bước 2*: Sử dụng công cụ, phương tiện học Toán với sự hỗ trợ của phần mềm Geogebra để dự đoán kết quả bài toán; *Bước 3:* Chứng minh bài toán; *Bước 4:* Rút ra kết luận; *Bước 5:* Đào sâu giải pháp (nếu có).

Dựa vào quy trình trên, chúng tôi minh họa việc sử dụng phần mềm GeoGebra nhằm tăng tính trực quan cho HS trong hoạt động tiếp cận và hình thành định lý về điều kiện để đường thẳng vuông góc mặt phẳng.

Bài toán: Cho mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau a và b. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng a và b thì dự đoán d có vuông góc với mặt phẳng (P) hay không?

Bước 1: Xem xét và xác định khả năng sử dụng công cụ, phương tiện học toán Geogebra trong việc giải quyết bài toán trên.

Bài toán chứa các khái niệm mặt phẳng, đường thẳng trong không gian và các tính chất vuông góc, thuộc,... nên bài toán có thể sử dụng công cụ, phương tiện học Toán với sự hỗ trợ của phần mềm Geogebra để tính góc giữa hai đường thẳng trong không gian.

Bước 2: Sử dụng công cụ, phương tiện học Toán với sự hỗ trợ của phần mềm Geogebra để dự đoán kết quả bài toán trên.

- Chọn ☰, sau đó chọn Perspectives, chọn 3D Graphics; Sử dụng công cụ Line dựng đường thẳng AB.

- Sử dụng công cụ A, nhấn chọn một vị trí bất kỳ nằm ngoài đường thẳng AB để dựng điểm C. Sau đó, sử dụng công cụ Line dựng đường thẳng AC.

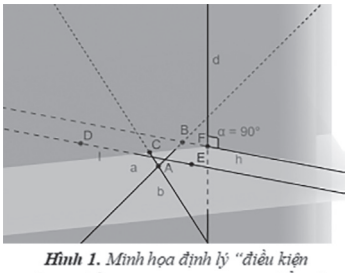
- Chọn công cụ và chọn Perpendicular Plane, nhấn chọn điểm B và đường thẳng AB để tạo ra mặt phẳng (R); nhấp chọn điểm C và đường thẳng AC để tạo ra mặt phẳng (S).

- Chọn công cụ Intersect Two Surfaces, nhấn chọn hai mặt phẳng (R) và (S) để tạo ra giao tuyến d vuông góc với AB và AC.

- Chọn công cụ Plane, chọn hai đường thẳng AB và AC để tạo ra mặt phẳng (P) chứa AB và AC. Chọn công cụ Line, nhấn chọn hai vị trí bất kỳ trong mặt phẳng (P) để dựng đường thẳng l bất kỳ.

- Chọn công cụ Intersect, nhấn chọn đường thẳng d với mặt phẳng (P) tạo ra giao điểm F; Chọn công cụ Parallel Line, nhấn chọn đường thẳng l và điểm F tạo ra đường thẳng h.

- Chọn công cụ Angle, nhấn chọn hai đường thẳng d và h. Kết quả hiển thị trên hình là số đo góc của đường thẳng d với đường thẳng h; Cuối cùng, Chọn công cụ Move, di chuyển đường thẳng h và quan sát số đo góc của d và h. Từ đó đưa ra dự đoán.



Hình 1. *Minh họa định lý "điều kiện đường thẳng vuông góc với mặt phẳng"*

Sau khi yêu cầu HS quan sát hình vẽ, thông qua một số câu hỏi của GV để giúp HS dự đoán quan hệ giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P). Chẳng hạn, GV: Hãy di chuyển đường thẳng h và cho nhận xét về số đo góc giữa hai đường thẳng d và h. HS: Số đo giữa hai đường thẳng d và h luôn bằng 90^0.

Như vậy, thông qua quan sát hình ảnh trực quan việc di chuyển đường thẳng d qua từng trường hợp ở bước 2, HS bước đầu nhận biết tên gọi và hiểu cách sử dụng các nút lệnh, hiểu các tính năng hình học động và Toán học động của phần mềm GeoGebra, ứng dụng hiệu quả công cụ này trong quá trình dự đoán và khám phá trực quan mối quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Bước 3: Chứng minh bài toán.

Qua F, kẻ đường thẳng a, b sao cho $a//AB$ và $b//AC$.

Lấy $M, P \in a$ và $N, Q \in b$ sao cho $FM = FN = FP = FQ$.

Từ cách dựng các điểm M, N, P, Q, ta có MNPQ là hình chữ nhật. Lấy một điểm $T \in d$ không thuộc mặt phẳng (P). Ta chứng minh TF vuông góc với mọi đường thẳng đi qua F trong mặt phẳng (P).

Trường hợp 1: Đường thẳng cần chứng minh vuông góc với TF cắt MQ

Vẽ đường thẳng bất kì qua F cắt MQ, NP lần lượt tại G và H. Theo định lý Thales, ta có:

$\frac{FG}{FH} = \frac{FQ}{FN} = \frac{QG}{HN} = 1$, suy ra $FG = FH, QG = NH$.

Ta có $\sqrt{TF^2 + FM^2} = \sqrt{TF^2 + FN^2} = \sqrt{TF^2 + FP^2} = \sqrt{TF^2 + FQ^2}$.

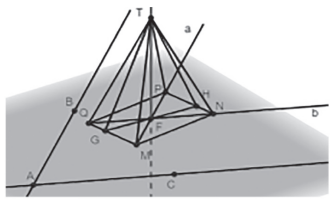
Suy ra $TM = TN = TP = TQ$.

Xét tam giác TMQ và TPN có $TM = TP, TQ = TN, MQ = NP$.

Suy ra $\Delta TMQ = \Delta TPN$ $(c.c.c)$. Do đó, $\widehat{TQM} = \widehat{TNP}$.

Xét tam giác TQG và TNH, ta có: $GQ = HN, \widehat{TQG} = \widehat{TNH}, TQ = TN$.

Suy ra $\Delta TQG = \Delta TNH$ $(c.g.c)$.



Hình 2. *Minh họa IF vuông góc (P) (TH1)*

Vì vậy, $TG = TH$, dẫn đến TGH là tam giác cân tại T, mà $FG = FH$ nên $IF \perp GH$.

Trường hợp 2: Đường thẳng cần chứng minh vuông góc vớ TF song song với MQ

Gọi R, S lần lượt là giao điểm của đường thẳng qua F song song với MQ với MN, PQ.

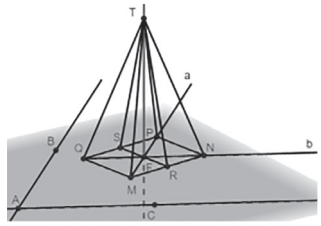
Theo định lý Thales, ta có $\frac{FR}{FS} = \frac{MR}{PS} = \frac{FM}{FP} = 1 \Rightarrow FR = FS, MR = PS$.

Xét tam giác TQP và TNM có $TP = TM, TQ = TN, QP = NM$.

Suy ra $\Delta TQP = \Delta TNM$ $(c.c.c)$. Dẫn đến, $\widehat{TQP} = \widehat{TNM}$.

Xét tam giác TMR và TPS có $MR = PS, TM = TP$ (do TH1), và $\widehat{TMR} = \widehat{TPS}$.

Suy ra $\Delta TMR = \Delta TPS$ $(c.g.c)$. Do đó, $TR = TS$. Vậy tam giác TRS là tam giác cân tại T, mà $FR = FS$ nên $TF \perp RS$.



Hình 3. *Minh họa IF vuông góc (P) (TH2)*

Bước 4: Rút ra kết luận.

Từ hai trường hợp trên, ta được đường thẳng TF vuông góc với mọi đường thẳng qua F trong mặt phẳng (P). Điều này dẫn đến TF vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng (P). Thật vậy, với mọi đường thẳng t trong mặt phẳng (P), tồn tại duy nhất đường thẳng t' qua F song song với t, mà TF vuông góc với t' nên TF vuông góc với t. Vậy TF vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng (P), hay d vuông góc với mặt phẳng (P).

Bước 5: Đào sâu giải pháp (nếu có).

Ở trong định lý này, ta thấy có giả thiết hai đường thẳng a, b cắt nhau. Liệu a song song với b thì kết luận của định lý có còn đúng không? Câu trả lời là không. Ta dựng hình như sau để có phản ví dụ.

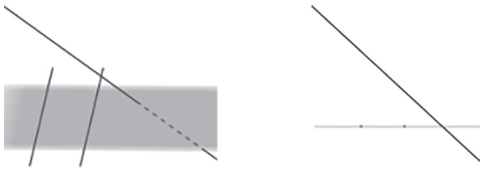
- Chọn ☰, sau đó chọn Perspectives, chọn 3D Graphics; - Sử dụng công cụ Line, dựng đường thẳng AB, đặt tên là a; - Sử dụng công cụ để tạo điểm C bất kỳ (không thuộc AB); - Sử dụng công cụ Parallel Line, nhấn chọn điểm C và đường thẳng AB để dựng đường thẳng qua C song song với AB, đặt tên là b; - Sử dụng công cụ Perpendicular Plane, nhấn chọn điểm C và đường thẳng AB để tạo mặt phẳng

(Q) qua C vuông góc với AB; - Sử dụng công cụ 

, dựng đường thẳng DE bất kỳ nằm trong (Q) sao cho DE không vuông góc với mặt phẳng (P).

Vì a, b vuông góc với mặt phẳng (Q) nên a, b vuông góc với DE nhưng rõ ràng DE không vuông góc với mặt phẳng (P).

Trực quan hóa giúp HS dự đoán, tiếp cận và hình thành định lý "Điều kiện để một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng". Khi sử dụng GeoGebra, GV có thể giúp HS quan sát trực tiếp nhiều vị trí của đường thẳng d với mặt phẳng (P). Tuy nhiên, với cách dựng d luôn vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b trong (P) cho trước, thì góc giữa d và (P) luôn bằng 90^0. Nhờ mô hình không gian ba chiều, HS không còn phải tưởng tượng mơ hồ như khi nhìn hình vẽ phẳng. Tính linh hoạt của phần mềm giúp HS dễ dàng dự đoán, ghi nhớ và hiểu sâu định lý, thay vì học thuộc một cách máy móc theo cách một số GV sử dụng phương pháp truyền thống trước đây.



Hình 4. Minh họa quan hệ vuông góc khi hai đường thẳng a và b không cắt nhau

3. Kết luận và khuyến nghị

GeoGebra là công cụ hữu dụng, giúp nâng cao chất lượng giảng dạy môn Hình học lớp 11. Việc sử dụng phần mềm này không những giúp HS trực quan hóa các hình ảnh trong không gian ba chiều, dự đoán và hiểu rõ hơn các khái niệm hình học trừu tượng mà còn khuyến khích các em tham gia tích cực vào quá trình học tập. Mặc dù có một số hạn chế như yêu cầu kỹ năng sử dụng phần mềm thành thạo và cần có thiết bị công nghệ để thực hiện nhưng nếu GV và HS vượt qua những hạn chế này, GeoGebra sẽ là công cụ cực kỳ hữu ích trong việc nâng cao chất lượng giảng dạy và học tập. Việc tích hợp GeoGebra vào dạy học sẽ giúp HS phát triển kỹ năng tư duy logic, khám phá sáng tạo và cải thiện kết quả học tập môn Toán của các em.

Vì vậy, để tối đa hóa hiệu quả sử dụng GeoGebra trong giảng dạy Toán học, đặc biệt là Hình học cần có sự quan tâm, hỗ trợ từ GV, nhà trường và cơ quan quản lý giáo dục. Các cơ quan quản lý nên tổ chức các khóa huấn luyện, hội thảo về GeoGebra, giúp GV làm chủ các công cụ từ cơ bản đến nâng cao. Nhà trường cần cung cấp tài liệu hướng dẫn chi tiết, bao gồm bài giảng mẫu và ví dụ minh họa. Đồng thời, cần đảm bảo đủ máy tính để GV và HS luôn có cơ hội thực hành phần mềm. Việc tích hợp GeoGebra vào chương trình chính thức là cần thiết, từ kế hoạch giảng dạy đến bài tập ứng dụng, khuyến khích HS sử dụng GeoGebra để dự đoán kết quả và khám phá từng mạch kiến thức của bộ môn Toán học.

Tài liệu tham khảo

[1] Natalija Budinsky, Zsolt Lavicza & Kristof Fenyvesi, (2018), *Ideas for using GeoGebra and Origami in Teaching Regular Polyhedrons Lessons (Các ý tưởng sử dụng GeoGebra và Origami trong giảng dạy bài học về đa diện đều)*, K-12 STEM Education (Giáo dục STEM bậc K-12), 4 (1), pp. 297-303.

[2] Serpil Yorganci, (2018), *A study on the views of graduate students on the use of GeoGebra in mathematics teaching (Một nghiên cứu về quan điểm của học viên cao học đối với việc sử dụng GeoGebra trong giảng dạy Toán học),* European Journal of Education Studies (Tạp chí Nghiên cứu Giáo dục Châu Âu), pp. 63-78.

[3] Yismaw Abera Wassie - Gurju Awgichew Zergaw (2019), *Some of the Potential Afferdances, Challenges and Limitations of Using GeoGebra in Mathematics Education (Một số tiềm năng, thách thức và hạn chế của việc sử dụng GeoGebra trong giáo dục Toán học)*, Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education (Tạp chí Toán học, Khoa học và Công nghệ Giáo dục Eurasia), 15(8), pp. 1-11.

[4] Nguyễn Ngọc Giang, Phạm Huyền Trang, Nguyễn Huỳnh Nam (2023), *Bồi dưỡng năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán với sự hỗ trợ của phần mềm GeoGebra trong dạy học tính góc giữa hai đường thẳng trong không gian*, Tạp chí Khoa học Giáo dục Việt Nam, tập 19, số 3, tr. 28-33.

[5] Nguyễn Thị Phương (2020), *Thiết kế tình huống dạy học khám phá trong chủ đề khối tròn xoay - Hình học 12 với sự hỗ trợ của phần mềm GeoGebra*, Luận văn Thạc sĩ Khoa học giáo dục, Trường Đại học Sài Gòn.