PHƯƠNG PHÁP TÌM LỜI GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRONG MẶT PHẲNG CHO HỌC SINH LỚP 10 THEO HƯỚNG PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC

TRƯƠNG MỸ AN NGỌC
NGUYỄN THỊ HƯƠNG LAN
Trường Đại học Tân Trào

Nhận bài ngày 20/4/2025. Sửa chữa xong 28/4/2025. Duyệt đăng 12/5/2025.

Abstract

This article presents methods for solving selected plane geometry problems for 10th-grade students, with a focus on competency development. Teaching mathematics with an emphasis on developing students' problem-solving capacity aligns with the broader goals of math education. The proposed methods aim to foster student autonomy, creativity, and active engagement in the learning process, in line with current educational reforms that prioritize learner-centered approaches and independent thinking.

Keywords: *Geometry, problem-solving, coordinates, solution strategies, students, teachers.*

1. Đặt vấn đề

Trong xu hướng phát triển nền kinh tế tri thức, Việt Nam ngày càng coi trọng giáo dục và khẳng định giáo dục là quốc sách hàng đầu, làm nguồn lực phát triển kinh tế - xã hội. Những năm qua với nhiều giải pháp, nền giáo dục Việt Nam đã đạt được nhiều thành tựu to lớn, đào tạo được nguồn nhân lực cho đất nước và xã hội. Môn Toán ở bậc Trung học phổ thông có mục tiêu hình thành và phát triển năng lực toán học cho học sinh (HS), với các yêu cầu như: nêu và trả lời câu hỏi khi lập luận, giải quyết vấn đề; lập luận hợp lý khi giải các bài toán, chứng minh các mệnh đề toán học không quá phức tạp; sử dụng mô hình toán học để mô tả các tình huống thực tiễn và kết hợp ngôn ngữ toán học với ngôn ngữ thông thường để biểu đạt kết quả. HS cũng cần trình bày ý tưởng và sử dụng các công cụ toán học để thực hiện nhiệm vụ học tập hoặc diễn tả các lập luận toán học. Môn Hình học giải tích trong mặt phẳng tọa độ là một trong những nội dung cơ bản trong chương trình Hình học mà HS được học ở lớp 10. HS thường gặp khó khăn khi tiếp cận với các bài toán hình học tọa độ, đặc biệt trong việc định hướng cách giải và sử dụng các giả thiết của bài toán. Để giải tốt được HS phải có kiến thức tổng hợp và biết vận dụng các kiến thức hình học phẳng. Đây là loại toán rèn được các phẩm chất tư duy cho HS. Bởi vậy, chúng tôi thấy các bài toán về hình học trong mặt phẳng tọa độ là bài toán khó trong các kì thi trung học phổ thông quốc gia, các kì thi chọn HS giỏi. Tuy nhiên, khi gặp các bài toán tọa độ trong mặt phẳng, phần lớn HS còn lúng túng, gặp khó khăn khi phân tích và tìm lời giải. HS chưa nắm được nhiều kết quả quan trọng của hình học phẳng trong tam giác, các tứ giác đặc biệt (hình bình hành, hình thoi, hình thang, hình chữ nhật,…).

2. Nội dung nghiên cứu

Một trong những vấn đề quan trọng được đề cập trong các nghiên cứu là việc xác định cách giải của một bài toán Hình học tọa độ cần được trình bày rõ ràng và phù hợp với đối tượng HS. Điều này giúp HS không chỉ phát triển khả năng tư duy mà còn hiểu rõ quy trình dẫn đến lời giải. Mặc dù nhiều tài liệu đã đưa ra lời giải sẵn cho các bài toán Hình học trong mặt phẳng tọa độ nhưng việc giải thích chi tiết từng bước giải thường chưa được chú trọng. Điều này dẫn đến việc HS chưa hiểu rõ "tại sao"

Email: truongmyanngoc87@gmail.com

và "như thế nào" để có được lời giải như vậy, từ đó khó phát triển khả năng phân tích và áp dụng kiến thức một cách hiệu quả.

2.1. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ (cho biết phương trình Δ hay điểm M, tham số hóa được theo ẩn) và thỏa mãn một số điều kiện cho trước

Phương pháp giải:

Gọi $M(t)\in\Delta$. Do $M\in\Delta$, nên ta sẽ gọi $M(t)$ (tham số hóa điểm M dựa vào Δ). Sau đó ta có được phương trình chứa ẩn: $f(t)=0.$ Giải phương trình tìm t giúp ta tìm được tọa độ điểm M.

Lưu ý:

+ M có thể được tham số hóa thông qua một điểm khác.

+ $MI=R$ =cont, $d(M,\Delta)=h=cont$.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho các đường thẳng $d_1: x+y+3=0;\ d_2: x-y-4=0;\ d_3: x-2y=0.$ Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng d_3 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d_1 bằng hai lần khoảng cách từ M đến đường thẳng $d_2.$ [3, tr. 58]

Giải: Gọi $M(2t;t)\in d_3$, khi đó: $d(M,d_1)=2d(M;d_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{|2t+t+3|}{\sqrt{2}}=2.\frac{|2t-t-4|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow |3t+3|=2.|t-4|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3t+3=2(t-4)\\3t+3=-2(t-4)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-11\\t=1\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M(-22;-11)\\M(2;1)\end{array}\right.$$

Vậy: $M(-22;-11)$ hoặc $M(2;1)$.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy,$ cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=4$ và đường thẳng $\Delta: y-3=0.$ Tam giác MNP có trực tâm trùng với tâm của (C), các đỉnh N và P thuộc Δ, đỉnh M và trung điểm của cạnh MN thuộc (C). Tìm tọa độ điểm P [1, tr. 62].

Phân tích tìm lời giải:

Vẫn một câu hỏi quen thuộc khi đứng trước bài toán hình học Oxy: "Với những dữ kiện ban đầu, ta có thể tìm được ngay tọa độ của những điểm nào trước?". Trong bài toán này câu trả lời là điểm M. Bởi ta nhìn thấy ngay điểm M với MI=R=2 và M thuộc đường thẳng đi qua I song song với Δ. Ta đã hoàn thiện xong hướng giải của bài toán.

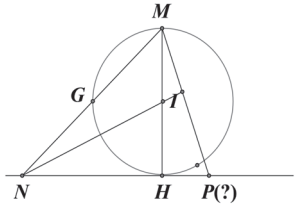
Lời giải:

+ Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R=2.$

Ta có MI đi $I(1;1)$ vuông góc với $\Delta: y-3=0$ nên MI có phương trình: $x-1=0$

Gọi $M(1;m)$, khi đó $MI^2=R^2\Leftrightarrow(m-1)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=3\end{array}\right.$

$\Rightarrow M(1;-1)$ hoặc $M(1;3)$ (loại vì $M\in\Delta$).



+ Gọi K là trung điểm của MN, do Δ tiếp xúc với (C) tại H nên IK là đường trung bình của tam giác MNH. Suy ra $IK//\Delta$, suy ra phương trình IK là: $y-1=0.$

Gọi $K(t;1)\in IK,$ khi đó $KI^2=R^2\Leftrightarrow(t-1)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=3\end{array}\right.\Rightarrow K(-1;1)$ hoặc $K(3;1)$.

+ Với $K(-1;1)\Rightarrow N(-3;3); K(3;1)\Rightarrow N(5;3)$ (Vì K là trung điểm của MN).

+ Gọi $P(a;3)\in\Delta\Rightarrow\overrightarrow{MP}=(a-1;4)$

Với $N(-3;3)\Rightarrow\overrightarrow{NI}=(4;-2),$ khi đó $\overrightarrow{NI}\perp\overrightarrow{MP}\Leftrightarrow 4(a-1)-2.4=0\Leftrightarrow a=3\Rightarrow P(3;3)$

Với $N(5;3)\Rightarrow\overrightarrow{NI}=(-4;-2)$, khi đó $\overrightarrow{NI}\perp\overrightarrow{MP}$

$\Leftrightarrow -4(a-1)-2.4=0 \Leftrightarrow a=-1 \Rightarrow P(-1;3)$

Vậy: $P(3;3)$ hoặc $P(-1;3)$.

Nhận xét: Các dữ kiện quan trọng của bài toán: (C) tiếp xúc Δ tại H, khi đó có thể tìm được điểm M theo cách cho I là trung điểm của MH.

2.2. Tìm tọa độ điểm dựa trên các phép toán vectơ

Phương pháp giải:

Bước 1: Chọn dạng tọa độ của điểm cần tìm (thường chọn tọa độ của điểm cần tìm dạng tham số).

Bước 2: Từ giả thiết về điều kiện và các phép tính về vectơ (tích vô hướng, độ dài, khoảng cách, góc,...) để thiết lập phương trình.

Bước 3: Giải các phương trình, kiểm tra các điều kiện (nếu có) và kết luận.

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác tam giác ABC có trọng tâm thuộc đường thẳng $\Delta: x+y-2=0.$ Đường thẳng đi qua A và B có phương trình $x+2y-3=0.$ Tìm tọa độ A và B biết $AB=\sqrt{5}$, $C(-1;-1)$ và hoành độ của A lớn hơn hoành độ của B [2, tr. 38].

Phân tích tìm lời giải:

- Với bài toán này, trọng tâm tam giác ABC thuộc đường thẳng Δ và $C(-1;-1)$ nên ta thấy việc tìm được tọa độ trung điểm I của AB là khá dễ dàng.

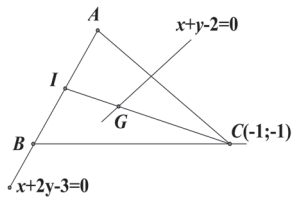
- Vì nếu biết được điểm A,B $(A,B\in AB$ và $AI=BI=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2})$

- Điểm I,G đều thuộc các đường thẳng đã biết phương trình và liên hệ với các điểm $C(-1;-1)$ qua hệ thức vecto $3\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{CI}$. Do đó ta có lời giải chi tiết như sau:

Lời giải:

Gọi I là trung điểm của $AB.$ Vì $I\in AB$ nên $I\in(3-2m;m)$ và trọng tâm $G\in\Delta$ nên $G(n;2-n)$.

- Suy ra: $\begin{cases}\overrightarrow{CG}=(n+1,3-n)\\ \overrightarrow{CI}=(4-2m;m+1)\end{cases}$



Mà G là trọng tâm tam giác ABC nên: $3\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{CI}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3(n+1)=2(4-2m)\\ 3(n-3)=2(m+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3n+4m=5\\ 3n+2m=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-1\\ n=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}I(5;-1)\\ G(3;-1)\end{cases}$

Khi đó A,B thuộc đường tròn $I(5;-1)$; $R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

Suy ra tọa độ điểm A,B là nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}x+2y-3=0\\ (x-5)^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-2y\\ (y+1)^2=\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4;y=\frac{1}{2}\\ x=6;y=\frac{-3}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A\left(6;\frac{-3}{2}\right)\\ B\left(4;\frac{1}{2}\right)\end{cases}$$

Vậy: $A\left(6;\frac{-3}{2}\right)$; $B\left(4;\frac{1}{2}\right)$

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $A(5;-7)$, điểm C thuộc đường thẳng có phương trình: $x-y+4=0$. Đường thẳng đi qua D và trung điểm của đoạn thẳng AB có phương trình: $3x-4y-23=0.$ Tìm tọa độ của B và C, biết B có tung độ dương [3, tr. 36].

Phân tích tìm lời giải:

Tìm tọa độ điểm nào trước, cũng luôn là câu hỏi được đặt ra khi bài toán yêu cầu tìm tọa độ của nhiều hơn một điểm. Điểm có mối liên hệ qua hệ thức vecto- điểm thuộc đường thẳng-điểm có điều kiện về hoành độ (tung độ)…Như vậy, với ví dụ cụ thể trên thì:

+ Việc tìm tọa độ hai điểm B và C sẽ ưu tiên tìm điểm C trước. Lúc này ta cần gắn kết điểm C với những dự kiện đã biết của bài toán là $A(5;-7)$ và đường thẳng $DM: 3x-4y-23=0$ $(MA=MB)$ bằng cách nối điểm C với A và cắt DM tại N. Nhận thấy nếu ta tìm được mối liên hệ vecto qua 3 điểm C,N,A

điều này hoàn toàn làm được khi ta vận dụng các kiến thức hình học sơ cấp để chỉ ra $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AN}$. Từ đó ta tìm được tọa độ điểm C.

+ Ta thấy không có đường thẳng đã biết phương trình nào đi qua điểm B. Song thay vào đó ta có dữ kiện M là trung điểm của AB và thuộc đường thẳng $3x-4y-23=0.$ Do đó ta có thể tham số hóa điểm B theo một ẩn thông qua điểm M. Khi đó dữ kiện ΔABC vuông tại $B.$ Từ đó suy ra được tọa độ điểm $B.$

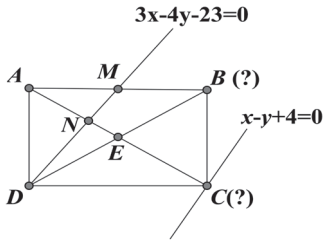
Lời giải:

+ Do điểm C,N lần lượt thuộc các đường thẳng có phương trình $x-y+4=0$ và $3x-4y-23=0.$

+ Gọi trung điểm của AB là M và gọi N,I lần lượt là giao điểm của AC và BD; AC và DM.

Khi đó N là trọng tâm của tam giác $ABD \Rightarrow AN=\frac{2}{3}AI=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}AC=\frac{1}{3}AC \Rightarrow \overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AN}$ (*)

Nên $\begin{cases}C(t_1;t_1+4)\\N(1+4t_2:-6+3t_2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AC}=(t_1-5;t_1+11)\\\overrightarrow{AN}=(4t_2-4;3t_2+2)\end{cases}$



Từ $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}t_1-5=3(4t_2-4)\\t_1+11=3(3t_2+2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1-12t_2=-7\\t_1-9t_2=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=1\\t_2=\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow C(1;5);N\left(\frac{11}{3};-3\right)$

Gọi điểm $M(1+4m;-5+3m)\in DM.$ Do M là trung điểm của AB nên suy ra $B(8m-3;6m-3).$

$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(8m-8;6m+4)\\\overrightarrow{CB}=(8m-4;6m-8)\end{cases}$

Khi đó tam giác $ABC;\hat{B}=90^0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=0\Leftrightarrow(8m-8)(8m-4)+(6m+4)(6m-8)=0$

Với $m=0\Rightarrow B(-3;-3)$ (loại)

$\Leftrightarrow 100m^2-120m=0\Leftrightarrow\begin{cases}m=0\\m=\frac{6}{5}\end{cases}$

Với $m=\frac{6}{5}\Rightarrow B\left(\frac{33}{5};\frac{21}{5}\right)$

Vậy: $B\left(\frac{33}{5};\frac{21}{5}\right)$ và $C(1;5)$.

2.3. Tìm Tọa độ điểm liên quan đến phương trình đường tròn.

Phương pháp: Từ giả thiết và các tính chất hình học của đường tròn, dùng các phép toán về vectơ, tọa độ ta lập phương trình, hệ phương trình giải tọa độ điểm cần tìm.

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-3)^2=2$ và đường thẳng $\Delta:x-y-2=0.$ Tìm tọa độ điểm M trên C sao cho khoảng cách từ M đến Δ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất [3, tr. 58].

Phân tích tìm lời giải: Viết phương trình đường thẳng đi qua tâm và vuông góc với Δ, tìm tọa độ giao điểm của Δ và đường tròn (C). Từ đó so sánh khoảng cách $d(M;\Delta)$ với khoảng cách từ một trong hai đầu mút của đường kính vuông góc đó.

Lời giải:

Cách 1: Đường tròn (C) có tâm $I(2;3)$, bán kính $R=\sqrt{2}$ và $d(I;\Delta)=\frac{3}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$ nên Δ và đường tròn (C) không có điểm chung.

Đường thẳng d đi qua I, vuông góc với đường thẳng Δ nên $d:x+y-5=0.$

Tọa độ giao điểm của d và đường tròn (C) là nghiệm của hệ phương trình sau:

$\begin{cases}x+y=5\\(x-2)^2+(y-3)^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3;y=2\\x=1;y=4\end{cases}$

Suy ra: $A(1;4);B(3;2)$ là giao điểm của d và đường tròn (C).

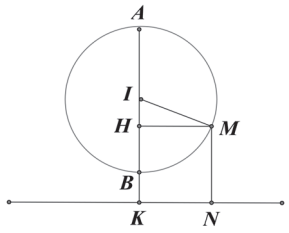
Ta có: $d(A;\Delta)=\frac{5}{\sqrt{2}};d(B;\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Với mọi điểm M thuộc (C), hình chiếu của M trên d là điểm H nằm giữa A và B. Ta có: $d(B;\Delta) \le d(H;\Delta) = d(M;\Delta) \le d(A;\Delta) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le d(M;\Delta) \le \frac{5}{\sqrt{2}}$.

Khoảng cách từ M đến Δ lớn nhất bằng $\frac{5}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow M \equiv A \Leftrightarrow M(1;4)$

Khoảng cách từ M đến Δ nhỏ nhất bằng $\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow M \equiv B \Leftrightarrow M(3;2)$

Cách 2: Gọi $M(a;b) \in (C) \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-3)^2 = 2$ thì $d(M;\Delta) = \frac{|a-b-2|}{\sqrt{2}}$.



Ta có: $|(a-2)-(b-3)| \le \sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{(a-2)^2+(B-3)^2} = 2$

$\Leftrightarrow -2 \le a-b+1 \le 2 \Leftrightarrow -5 \le a-b-2 \le -1 \Rightarrow 1 \le |a-b-2| \le 5$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \le d(M;\Delta) \le \frac{5}{\sqrt{2}}$.

$d(M,\Delta) = \frac{5}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{a-2}{1} = \frac{b-3}{-1} = \frac{a-b+1}{2} = -1 \Leftrightarrow M(1;4)$

$d(M,\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{a-2}{1} = \frac{b-3}{-1} = 1 \Leftrightarrow M(3;2)$

Nhận xét: Đối với bài toán về đánh giá các đại lượng trong hình, ta có thể chuyển sang tiếp cận bằng biểu thức đại số và dựa trên một số bất đẳng thức cơ bản để đánh giá.

3. Kết luận

Mỗi bài toán Hình học tọa độ trong mặt phẳng đều mang bản chất của một bài toán hình học phẳng nào đó. Tuy nhiên, khi giải các bài toán Hình học tọa độ HS thường không chú trọng đến bản chất hình học của bài toán ấy. Vì vậy, thực tế yêu cầu phải trang bị cho HS một hệ thống phương pháp suy luận giải toán hình học tọa độ trong mặt phẳng từ các tính chất của hình học phẳng với mong muốn giúp HS lớp 10 tiếp thu các kiến thức về tìm tọa độ điểm trong các bài toán Hình học, đồng thời biết vận dụng linh hoạt kiến thức để giải các bài toán. Từ đó hình thành phương pháp giải hiệu quả giúp HS phát huy được tính chủ động, tích cực, sáng tạo. HS có điều kiện rèn luyện và PTNL tư duy các bài tập toán trong mặt phẳng tọa độ, củng cố vận dụng kĩ năng kĩ xảo trong quá trình dạy học, PTNL tư duy khoa học. Qua đó đánh giá được khả năng tiếp thu và vận dụng kiến thức ở HS, giúp các em nhận biết các dạng bài và có hướng giải bài toán nhanh, gọn và chính xác.

Chú thích

(*) Nghiên cứu này được hỗ trợ bởi Trường Đại học Tân Trào, Tuyên Quang, Việt Nam.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Minh Hà (2019), *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Hình học 10*, NXB Giáo dục Việt Nam, Hà Nội.

[2] Lê Hoành Phò (2017), *Bồi dưỡng học sinh giỏi Toán Hình học 10*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[3] Đỗ Thanh Sơn (2019), *Nâng cao và phát triển Hình học 10*, NXB Giáo dục Việt Nam, Hà Nội.

[4] Trần Luận (2011), *Về cấu trúc năng lực toán học của học sinh,* Kỉ yếu Hội thảo quốc gia về giáo dục Toán phổ thông, NXB Giáo dục Việt Nam, Hà Nội.

[5] Bùi Văn Nghị (2009), *Vận dụng lý luận vào thực tiễn dạy học môn Toán ở trường phổ thông*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.

[6] Đoàn Quỳnh (2018), *Tài liệu chuyên Toán Hình học*, NXB Giáo dục Việt Nam, Hà Nội.

[7] Nguyễn Quang Sơn (2020), *Các chuyên đề nâng cao và phát triển Hình học 10*, NXB Tổng hợp Thành phố Hồ Chí Minh.