

ỨNG DỤNG CỦA MA TRẬN TRONG MÔ HÌNH ĐÓNG VÀ MỞ LEONTIEF

LÊ THỊ LOAN

Trường Đại học Xây dựng Miền Trung

Nhận bài ngày 17/6/2026. Sửa chữa xong 02/7/2026. Duyệt đăng 12/7/2026.

Abstract

Matrices have numerous applications across engineering and related disciplines. This article focuses on their application in Leontief's input-output model, which is widely used in economics to analyze interdependencies among different sectors of an economy. By employing matrix properties and operations, the model provides a systematic method for evaluating how changes in market conditions affect prices, demand, and supply. Specifically, the article examines the application of matrices in both the closed and open input-output models developed by Wassily Leontief, clarifying their mathematical structures and economic significance.

Keywords: Closed model, Leontief input-output model, open model.

1. Đặt vấn đề

Vào những năm 1930, một nhà kinh tế học người Mỹ tên là Wassily Leontief đã sử dụng ma trận để mô hình hóa các hệ thống kinh tế. Các mô hình của ông, thường được gọi là mô hình đầu vào - đầu ra, chia nền kinh tế thành các ngành, trong đó mỗi ngành sản xuất hàng hóa và dịch vụ không chỉ cho chính nó mà còn cho các ngành khác. Các ngành này phụ thuộc lẫn nhau và tổng đầu vào luôn bằng tổng đầu ra. Năm 1973, ông đã giành được giải Nobel về Kinh tế cho công trình nghiên cứu về phân tích đầu vào - đầu ra của các ngành khác nhau ảnh hưởng lẫn nhau. Phân tích đầu vào - đầu ra là một phương pháp giúp dễ dàng tính toán và dự đoán cung và cầu của một hệ thống. Trong bài báo này, tôi sẽ ứng dụng các kiến thức đại số tuyến tính cụ thể là ma trận để giải các bài toán mô hình đóng và mô hình mở mà ông đã phát triển. Mô hình đóng của nghiên cứu hệ thống kinh tế khép kín không có sự can thiệp của các yếu tố từ bên ngoài, trong khi đó mô hình mở có nhu cầu tiêu dùng bên ngoài hệ thống. Hai mô hình này không chỉ có ý nghĩa trong lĩnh vực kinh tế mà còn thúc đẩy phát triển nhiều lĩnh vực khác trong cuộc sống.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Mô hình đóng

Phần này sẽ tìm hiểu về cấu trúc của mô hình đóng và sử dụng ma trận để tìm giá cân bằng trong mô hình này.

Mô hình đóng Leontief là một mô hình toán kinh tế phân tích mối quan hệ phụ thuộc lẫn nhau giữa các ngành trong một hệ thống kinh tế trong đó:

Tất cả tiêu dùng đều diễn ra trong nội bộ ngành, không có nhu cầu bên ngoài;

Với mỗi ngành thì đầu vào phải bằng đầu ra hay nói cách khác sản lượng mỗi ngành sau chi tiêu và sản lượng nhận vào phải bằng nhau;

Mô hình được biểu diễn qua phương trình $X = AX$.

Ví dụ: Chúng ta xem xét một nền kinh tế đơn giản chỉ có ba lĩnh vực (Liu & Li, 2007).

Giả sử trong một công ty sản xuất 3 ngành công nghiệp: than đá, điện và viễn thông. Ngành than

Email: lethiloan@muce.edu.vn

tự tiêu thụ 20% sản lượng mình sản xuất, và cho ngành điện 30%, và 50% cho ngành viễn thông. Mười phần trăm sản lượng của ngành điện được chính nó tiêu thụ, 30% bởi ngành viễn thông, và 60% bởi ngành than. Ngành viễn thông được tiêu thụ 40% bởi ngành điện, và 60% bởi ngành than.

- Viết ma trận đầu vào - đầu ra mô tả mô hình đóng này.
 - Nếu nhà đầu tư có số vốn 280 tỉ thì cần phải đầu tư bao nhiêu tiền vào mỗi ngành?
- Ta có thể biểu diễn bài toán bằng bảng sau:

Bảng 1: Ma trận đầu vào – đầu ra của mô hình đóng ba ngành

Đầu vào \ Đầu ra	Than đá	Điện	Viễn thông
Than đá	20	60	60
Điện	30	10	40
Viễn thông	50	30	0

Trong bài toán ta có sản lượng mà ngành này cung cấp cho các ngành khác tổng bằng 100%.

a. Ma trận đầu vào – đầu ra:

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 60 & 60 \\ 30 & 10 & 40 \\ 50 & 30 & 0 \end{pmatrix}$$

b. Mô hình bài toán Leontief đòi hỏi với mỗi ngành thì đầu vào phải bằng đầu ra hay nói cách khác sản lượng mỗi ngành sau chi tiêu và sản lượng nhận vào phải bằng nhau.

Nếu xem số tiền đầu tư của mỗi ngành than, điện, viễn thông lần lượt là các biến x, y, z thì ta có phương trình Leontief: $X = AX \Leftrightarrow (I - A)X = 0$ hay cụ thể:

$$\begin{cases} x = 0,2x + 0,6y + 0,6z \\ y = 0,3x + 0,1y + 0,4z \\ z = 0,5x + 0,3y \end{cases}$$

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 0,8x - 0,6y - 0,6z = 0 \\ -0,3x + 0,9y - 0,4z = 0 \\ -0,5x - 0,3y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{9}z \\ y = \frac{25}{27}z \\ z \in R \end{cases}$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc tham số z .

Nếu nhà đầu tư có số vốn 280 tỉ nghĩa là: $x + y + z = 280 \Leftrightarrow \frac{13}{9}z + \frac{25}{27}z + z = 280 \Leftrightarrow z = \frac{1080}{13} \approx 83,1$
 Do đó: $x = 120, y = 76,9$.

Vậy số tiền đầu tư của mỗi ngành than, điện, viễn thông lần lượt là 120 tỉ, 76,9 tỉ và 83,1 tỉ.

Nhận xét: Nếu chúng ta cho thêm thông tin vào bài toán, sẽ giúp ta xác định được trạng thái cân bằng.

Nếu số tiền đầu tư vào 3 ngành than đá: 150 tỉ, điện: 50 tỉ và viễn thông: 80 tỉ. Nhìn vào hàng 1 trong bảng 1 ta thấy ngành than đá tự tiêu thụ 20%, ngành điện cung cấp 60% sản lượng cho ngành than, viễn thông cung cấp 60% cho ngành than nên ta có các giá trị mới:

$$\begin{aligned} T_m &= 20\%.150 + 60\%.50 + 60\%.80 = 0,2.150 + 0,6.50 + 0,6.80 = 108 \\ D_m &= 0,3.150 + 0,1.50 + 0,4.80 = 82 \\ V_m &= 0,5.150 + 0,3.50 = 90 \end{aligned}$$

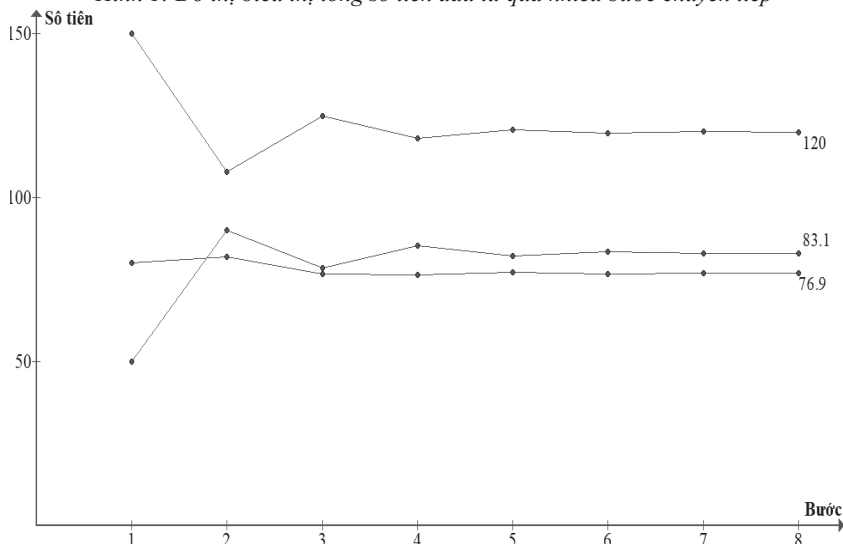
Ta thấy số tiền đầu tư vào ngành than ban đầu là 150 tỉ. Sau bước nhận vào và chi tiêu, số tiền đầu

tư là 108 tỉ. Sản lượng của mỗi ngành sau khi chi tiêu và sản lượng nhận vào không bằng số tiền đầu tư ban đầu.

Hình 1 bên dưới biểu thị thông tin tổng số tiền đầu tư 280 tỉ vào 3 ngành: than đá: 150 tỉ, điện: 50 tỉ và viễn thông: 80 tỉ bằng cách nhân ma trận $A = \begin{pmatrix} 20 & 60 & 60 \\ 30 & 10 & 40 \\ 50 & 30 & 0 \end{pmatrix}$ với vectơ cột là các giá trị T_m, D_m, V_m qua

nhiều bước chuyển tiếp. Quan sát ta thấy số tiền đầu tư cho mỗi ngành hội tụ về nghiệm của bài toán đầu vào – đầu ra Leontief. Nói cách khác trong dài hạn nó sẽ quay lại giá trị cân bằng.

Hình 1: Đồ thị biểu thị tổng số tiền đầu tư qua nhiều bước chuyển tiếp



2.2. Mô hình mở

Mô hình mở Leontief (Nguyễn Huy Hoàng, 2014, tr. 9) là một mô hình toán kinh tế trong đó:

Ngoài tiêu dùng nội địa, còn có nhu cầu bên ngoài từ phía người tiêu dùng,

Với mỗi ngành thì đầu vào phải bằng đầu ra,

Mô hình được biểu diễn qua phương trình $X = AX + D$.

Ví dụ: Một công ty năng lượng lớn sản xuất điện, gas và dầu mỏ. Để sản xuất 1 đô la điện cần đầu vào là 0,3 đô la từ điện, 0,1 đô la từ gas và 0,2 đô la từ dầu mỏ. Để sản xuất 1 đô la gas cần đầu vào là 0,3 đô la từ điện, 0,1 đô la từ gas và 0,2 đô la từ dầu mỏ. Để sản xuất 1 đô la dầu mỏ cần đầu vào là 0,1 đô la từ mỗi ngành.

a. Hãy tìm sản lượng cần thiết của mỗi ngành để đáp ứng nhu cầu cuối cùng là 20 tỷ đô la cho điện, 10 tỷ đô la cho gas và 15 tỷ đô la cho dầu mỏ?

b. Nếu nhu cầu cuối cùng của ngành điện tăng 5 tỷ đô, ngành gas giảm 10 tỷ đô và ngành dầu mỏ tăng 5 tỷ đô thì sản lượng đầu ra của mỗi ngành sẽ thay đổi như thế nào?

Bài giải:

a. Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là tổng đầu ra của điện, gas và dầu mỏ của công ty.

Ta thấy x_1, x_2, x_3 phải lớn hơn nhu cầu cuối cùng của điện, gas và dầu mỏ. Do đó, đối với tổng đầu ra của điện, gas và dầu mỏ cần phải có:

Tổng đầu ra = Nhu cầu nội bộ + Nhu cầu cuối cùng (Runtuwene, 2016).

Ta có thể minh họa bài toán bằng bảng sau:

Bảng 2: Ma trận hệ số đầu vào và nhu cầu cuối cùng của mô hình mở

Đầu vào \ Đầu ra	Điện	Gas	Dầu mỏ	Nhu cầu cuối cùng
Điện	0.3	0.3	0.1	20
Gas	0.1	0.1	0.1	10
Dầu mỏ	0.2	0.2	0.1	15

Theo đề bài một đô la điện cần 0,3 đô la từ điện, 0,1 đô la từ gas và 0,2 đô la từ dầu mỏ.

Vậy để tạo ra x_1 đô la điện cần $0.3x_1$ đô la điện, $0.1x_1$ đô la gas và $0.2x_1$ đô la dầu mỏ.

Tương tự để tạo ra x_2 đô la gas cần $0.3x_1$ đô la điện, $0.1x_1$ đô la gas và $0.2x_1$ đô la dầu mỏ.

Để tạo ra x_3 đô la dầu mỏ cần $0.1x_1$ đô la điện, $0.1x_1$ đô la gas và $0.1x_1$ đô la dầu mỏ.

$$\text{Khi đó ta có: } \begin{cases} x_1 = 0.3x_1 + 0.3x_2 + 0.1x_3 + 20 \\ x_2 = 0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.1x_3 + 10 \\ x_3 = 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 15 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Viết lại hệ phương trình trên dưới dạng ma trận:

$$X = AX + D$$

$$\Rightarrow (I - A)X = D$$

$$\Rightarrow X = (I - A)^{-1} D$$

$$I - A = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 0.9 & -0.1 \\ -0.2 & -0.2 & 0.9 \end{pmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{79}{50} & \frac{29}{50} & \frac{6}{25} \\ \frac{11}{50} & \frac{61}{50} & \frac{4}{25} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

$$\text{Do đó: } X = \begin{pmatrix} \frac{79}{50} & \frac{29}{50} & \frac{6}{25} \\ \frac{11}{50} & \frac{61}{50} & \frac{4}{25} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ 19 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Vậy tổng đầu ra của điện là 41 tỷ đô, gas là 19 tỷ đô và dầu mỏ là 30 tỷ đô.

$$\text{Tổng đầu vào của điện, gas và dầu mỏ là: } C = \begin{pmatrix} 0.6x_1 \\ 0.6x_2 \\ 0.3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24.6 \\ 11.4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vậy sản lượng tạo mới: } X - C = \begin{pmatrix} 16.4 \\ 7.6 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Bảng 3: Phân tích đầu vào – đầu ra của mô hình mở

Đầu ra	Đầu vào			Nhu cầu cuối cùng	Tổng đầu ra
	Điện	Gas	Dầu mỏ		
Điện	12.3	5.7	3	20	41
Gas	4.1	1.9	3	10	19
Dầu mỏ	8.2	3.8	3	15	30
Sản lượng tạo mới	16.4	7.6	21		
Tổng đầu tư	24.6	11.4	9		

a. Từ phương trình $X = (I - A)^{-1}D$ nếu D thay đổi thì đầu ra X sẽ thay đổi theo.

Vì vậy $X + \Delta X = (I - A)^{-1}(D + \Delta D)$ hay $(I - A)^{-1}D + \Delta X = (I - A)^{-1}D + (I - A)^{-1}\Delta D$ (Đỗ Công Khanh và cộng sự, 2005, tr. 14)

Suy ra $\Delta X = (I - A)^{-1}\Delta D$

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{79}{50} & \frac{29}{50} & \frac{6}{25} \\ \frac{11}{50} & \frac{61}{50} & \frac{4}{25} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.3 \\ -10.3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vậy nếu nhu cầu cuối cùng của ngành điện tăng 5 tỷ đô thì đầu ra là $41 + 3.3 = 44.3$ tỷ đô, ngành gas giảm 10 tỷ đô thì đầu ra là $19 - 10.3 = 8.7$ tỷ đô và ngành dầu mỏ tăng 5 tỷ đô thì đầu ra là $30 + 4 = 34$ tỷ đô.

3. Kết luận

Trong bài báo này, tôi chủ yếu sử dụng kiến thức ma trận để áp dụng giải một số bài toán mô hình đầu vào – đầu ra. Mô hình đầu vào - đầu ra Leontief rất hữu ích trong kinh tế học vì với mô hình này, chúng ta có thể tính toán các tác động dự kiến của những thay đổi trong nhu cầu cuối cùng hoặc ma trận tiêu dùng. Mô hình đóng được sử dụng để nghiên cứu sự cân bằng tổng thể và mối liên kết đầu ra – đầu vào giữa các ngành nếu không có sự can thiệp từ bên ngoài. Trong khi đó mô hình mở được dùng để lập kế hoạch sản xuất đáp ứng nhu cầu thị trường, dự báo tác động của các chính sách kinh tế cũng như phân phối nguồn lực tránh tình trạng thừa hoặc thiếu nguyên liệu. Chúng ta cũng có thể thử thay đổi sản lượng của mình với tư cách là nhà sản xuất và xem những tác động của nó đến ma trận tiêu dùng và nhu cầu cuối cùng. Hai mô hình này không chỉ có ý nghĩa trong lĩnh vực kinh tế mà còn giúp phát triển nhiều lĩnh vực khác như: lĩnh vực y tế giúp quản lý y tế và ứng phó đại dịch dự báo nhu cầu vật tư dựa trên mức độ lây lan của dịch bệnh, lĩnh vực công nghệ cao kết hợp cùng trí tuệ nhân tạo AI quản lý chuỗi cung ứng toàn cầu, quản lý tài nguyên bền vững và tối ưu hóa hệ thống ...

Tài liệu tham khảo

- Đỗ Công Khanh, Nguyễn Minh Hằng, & Ngô Thu Lương (2005). *Đại số tuyến tính*. NXB Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh.
- Liu, G., & Li, H. (2007). *Application examples of linear algebra in the field of economics*. <https://journals.indexcopernicus.com/api/file/viewByFileId/410141>.
- Nguyễn Huy Hoàng (2014). *Toán cơ sở cho kinh tế*. NXB Giáo dục.
- Runtuwene, N. J. (2016). *Applications of linear algebra in economics*. Institut Teknologi Bandung. <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2015-2016/Makalah-2015/Makalah-IF2123-2015-003.pdf>.
- Sekhon, R., & Bloom, R. (n.d.). 2.6: *Applications—Leontief models*. In *Applied finite mathematics*. Mathematics LibreTexts. [https://math.libretexts.org/Bookshelves/Applied_Mathematics/Applied_Finite_Mathematics_\(Sekhon_and_Bloom\)/02%3A_Matrices/2.06%3A_Applications__Leontief_Models](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Applied_Mathematics/Applied_Finite_Mathematics_(Sekhon_and_Bloom)/02%3A_Matrices/2.06%3A_Applications__Leontief_Models).