MỘT SỐ BÀI TOÁN QUỸ TÍCH TRONG CHƯƠNG TRÌNH MÔN TOÁN Ở TRUNG HỌC CƠ SỞ

LÊ DANH TUYÊN
Trường Đại học Tân Trào

Nhận bài ngày 26/3/2025. Sửa chữa xong 5/4/2025. Duyệt đăng 20/4/2025.

Abstract

In solving locus problems at the middle school level, classifying problem types is essential for arriving at accurate and efficient solutions. Moreover, exploring multiple solution methods for a single problem can foster student interest and engagement. This article discusses several common types of locus problems in the middle school Mathematics curriculum and provides effective strategies for solving each type.

Keywords: *Locus problems, middle school mathematics, bisector, point sets.*

1. Đặt vấn đề

Trong môn Toán ở trung học cơ sở (THCS), việc tìm ra lời giải của những bài toán quỹ tích luôn là một việc khó khăn đối với học sinh (HS). Tuy nhiên, nếu chúng ta phân dạng được các bài toán, quan trọng hơn nữa là một bài toán mà có thể tìm được lời giải thông qua nhiều phương pháp khác nhau là sự hoàn hảo. Quá trình này không hề đơn giản, đòi hỏi người giải toán phải nắm vững kiến thức cơ bản và có hướng đi đúng cho từng bài toán cụ thể. Trong quá trình giảng dạy và nghiên cứu tác giả nhận thấy nhiều giáo viên (GV) vẫn chưa thực sự hiểu hết về tầm quan trọng của dạng bài toán về quỹ tích, dẫn đến chưa dành thời gian và công sức nghiên cứu dạng toán này nên khi gặp một bài toán quỹ tích luôn là một vấn đề quan ngại cho việc dạy của GV và việc học của HS. Với mong muốn giúp bạn đọc hiểu hơn về các bài toán quỹ tích trong chương trình môn Toán ở THCS, bài viết nêu ra phân dạng bài toán và phương pháp giải cho các dạng toán cụ thể.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Định nghĩa

Một hình H được gọi là tập hợp điểm (quỹ tích) của những điểm M thỏa mãn tính chất A khi và chỉ khi nó chứa và chỉ chứa những điểm có tính chất A.

2.2. Phương pháp giải toán

Để tìm một tập hợp điểm M thỏa mãn tính chất A ta thường làm theo các bước sau:

Bước 1: Tìm cách giải:

+ Xác định các yếu tố cố định, không đổi, các tính chất hình học có liên quan đến bài toán.

+ Xác định các điều kiện của điểm M.

+ Dự đoán tập hợp điểm.

Bước 2: Trình bày lời giải: Phần thuận: Chứng minh điểm M thuộc hình H; Giới hạn: Căn cứ vào các vị trí đặc biệt của điểm M để chứng minh điểm M chỉ thuộc một phần B của hình H (nếu có); Phần đảo: Lấy điểm M bất kỳ thuộc B. Ta chứng minh điểm M thỏa mãn các tính chất A; Kết luận: Tập hợp các điểm M là hình B (nêu rõ hình dạng và cách dựng hình B).

Email: ledanhtuyen28987@gmail.com

2.3. Một số dạng toán quỹ tích cơ bản trong chương trình môn Toán ở trung học cơ sở

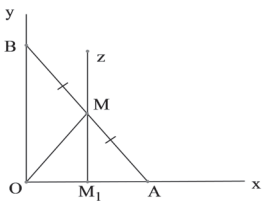
Dạng 1: Tập hợp điểm là đường trung trực.

Tập hợp các điểm M cách đều hai điểm A,B cho trước là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Ví dụ 1: Cho góc xOy cố định và điểm A cố định nằm trên tia Ox.

B là điểm chuyển động trên tia Oy, Tìm tập hợp trung điểm M của AB [1, tr. 65].

a. Phần thuận:



+ Xét tam giác vuông OAB ta có: $OM = MA = MB$ nên tam giác OAM cân tại M. Mặt khác OA cố định, suy ra M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng OA.

b. Giới hạn:

+ Khi B trùng với O thì $M \equiv M_1$ là trung điểm OA

+ Khi B chạy xa vô tận trên tia OB thì M chạy xa vô tận trên tia M_1z

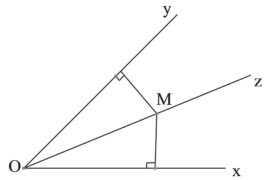
c. Phần đảo:

Lấy M bất kỳ thuộc tia M_1z, AM cắt Oy tại B. Suy ra $MO = MA \Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MOA}$. Mặt khác $\widehat{OBM} = \widehat{BOM}$ (cùng phụ với góc $\widehat{MAO} = \widehat{MOA}$) $\Rightarrow MO = MB$. Suy ra $MO = MA = MB$. Hay M là trung điểm của AB.

d. Kết luận: Tập hợp các trung điểm M của AB là đường trung trực của đoạn OA.

Dạng 2: Tập hợp điểm là tia phân giác.

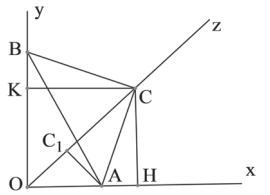
Tập hợp các điểm M nằm trong góc xOy khác góc bẹt và cách đều hai cạnh của góc xOy là tia phân giác của góc xOy.



Ví dụ 2: Cho góc xOy trên tia Ox lấy điểm A cố định. B là điểm chuyển động trên tia Oy. Tìm tập hợp các điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại C [2, tr. 30].

Giải:

a. Phần thuận: Dựng CH,CK lần lượt vuông góc với Ox,Oy thì $\Delta CAH = \Delta CBK \Rightarrow CH = CK$. Mặt khác góc xOy cố định suy ra $C \in$ tia phân giác Oz của góc xOy



b. Giới hạn, Phần đảo: Dành cho học sinh.

c. Kết luận: Tập hợp điểm C là tia phân giác Oz của góc xOy

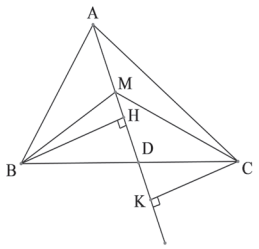
Dạng 3: Tập hợp điểm là đường thẳng, đường thẳng song song.

Ta thường gặp các dạng tập hợp cơ bản như sau:

a. Tập hợp các điểm M nằm trên đường thẳng đi qua các điểm cố định A,B là đường thẳng AB.

b. Tập hợp các điểm M nằm trên đường thẳng đi qua điểm cố định A tạo với đường thẳng (d) một góc không đổi.

c. Tập hợp các điểm M cách đường thẳng (d) cho trước một đoạn không đổi h là các đường thẳng song song với (d) và cách đường thẳng (d) một khoảng bằng h.



Ví dụ 3: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\frac{S_{MAB}}{S_{MAC}} = a > 0$ cho trước [3, tr. 42].

Hướng dẫn:

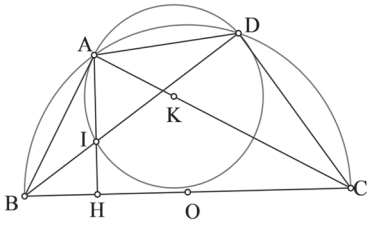
Phần thuận: Gọi D là giao điểm của AM và BC. Vẽ BH,CK lần lượt vuông góc với AM, $H,K \in AM$

Ta có: $\frac{S_{MAB}}{S_{MAC}}=\frac{BH}{CK}=\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{DB}{DC}=a$. Suy ra $\frac{BD}{CD}+1=\frac{a+1}{a}\Leftrightarrow DB=\frac{a}{a+1}BC\Rightarrow D$ là điểm cố định.

Vậy điểm M nằm trên đường thẳng (d) cố định đi qua A,D.

Phần còn lại dành cho học sinh.

Ví dụ 4: Cho nữa đường tròn đường kính BC trên nữa đường tròn lấy điểm A (Khác B,C). Kẻ AH vuông góc với $BC\,(H\in BC)$. Trên cung AC lấy điểm D bất kỳ (khác A,C). Đường thẳng BD cắt AH tại điểm I. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AID luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi D thay đổi trên cung AC [4, tr. 37].



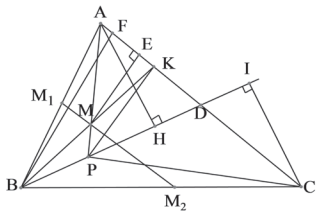
Hướng dẫn: Ta có: $\widehat{BDC}=90^0$, $\widehat{BAH}=\widehat{ACB}$ cùng phụ với góc $\hat{B}$. Mặt khác $\widehat{ADB}=\widehat{ACB}$ (cùng chắn cung AB). Suy ra $\widehat{BAI}=\widehat{ADI}$ suy ra AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADI.

Mặt khác AC cố định $AC\perp AB$ nên tâm K của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADI luôn thuộc đường thẳng AC.

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC và điểm K chuyển động trên cạnh AC,P là điểm chuyển động trên trung tuyến BD của tam giác ABC sao cho $S_{APK}=S_{BPC}$. Gọi M là giao điểm của AP,BK Tìm tập hợp các điểm M [4, tr. 58].

Hướng dẫn:

Bài toán liên quan đến diện tích nên ta dựng các đường cao $MF\perp AC,BE\perp AC,AH\perp BD,CI\perp BD$



Ta dễ chứng minh được: $\frac{S_{ABK}}{S_{AMK}}=\frac{MK}{BK}=\frac{MF}{BE},\frac{S_{ABD}}{S_{BDC}}=\frac{AH}{CI}=\frac{AD}{DC}=1$

Mặt khác ta cũng có: $\frac{S_{APB}}{S_{BPC}}=\frac{AH}{CI}=1$.

Từ giả thiết ta suy ra $S_{APK}=S_{APB}$. Nhưng $\frac{S_{APK}}{S_{APB}}=\frac{MK}{BM}=1\Rightarrow BM=\frac{1}{2}BK$

Vậy tập hợp điểm M là đường trung bình song song với cạnh AC của tam giác ABC trừ hai trung điểm M_1,M_2 của tam giác ABC.

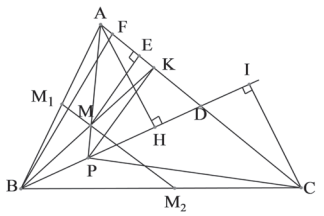
Dạng 4: Tập hợp điểm là đường tròn, cung chứa góc.

a. Nếu A,B cố định. Thì tập hợp các điểm M sao cho $\widehat{AMB}=90^0$ là đường tròn đường kính AB (không lấy các điểm A,B).

b. Nếu điểm O cố định thì tập hợp các điểm M cách O một khoảng không đổi R là đường tròn tâm O bán kính R.

c. Tập hợp các điểm M tạo thành với 2 đầu mút của đoạn thẳng AB cho trước một góc $\widehat{MAB}=\alpha$ không đổi $\left(0<\alpha<180^0\right)$ là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB. Gọi tắt là "'cung chứa góc".

Ví dụ 6: Cho tam giác cân $ABC\ (AB=AC)$ và D là một điểm trên cạnh BC. Kẻ $DM//AB$ ($M\in AC$). $DN//AC\left(N\in AB\right)$. Gọi D' là điểm đối xứng của D qua MN. Tìm quỹ tích điểm D' khi điểm D di động trên cạnh BC [5, tr. 39].



Hướng dẫn giải:

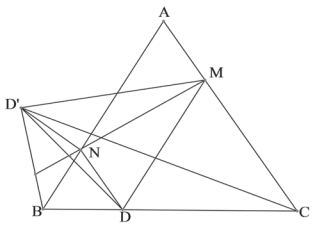
Phần thuận: Từ giả thiết đề ra ta thấy $NB=ND=ND'$, do đó ba điểm B,D,D' nằm trên đường tròn tâm N.

Từ đó $\widehat{BD'D}=\frac{1}{2}\widehat{BND}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (1).

Tương tự ta có ba điểm D',D,C nằm trên đường tròn tâm M.

Nên $\widehat{DD'C}=\frac{1}{2}\widehat{DMC}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\overset{\frown}{BD'C} = \overset{\frown}{BAC}$ (không đổi). Vì BC cố định, D' nhìn BC dưới một góc $\overset{\frown}{BAC}$ không đổi, D' khác phía với D (tức là cùng phía với A so với MN) nên D' nằm trên cung chứa góc $\overset{\frown}{BAC}$ vẽ trên đoạn BC (một phần của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).



Phần đảo: Bạn đọc tự giải.

Kết luận: Quỹ tích của điểm D' là cung chứa góc BAC trên đoạn BC. Đó chính là cung $\overset{\frown}{BAC}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

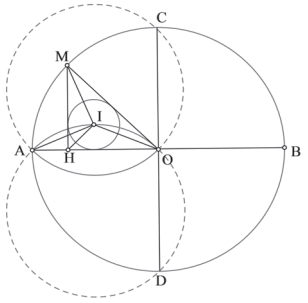
Ví dụ 7: Cho đường tròn $(O;R)$ hai đường kính AB và CD vuông góc. M là điểm di động trên $\overset{\frown}{CAD}$. H là hình chiếu của M trên AB. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác HMO. Tìm tập hợp các điểm I [6, tr. 20].

Hướng dẫn:

a. Phần thuận: ΔHMO có $\widehat{H} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HMO} + \widehat{HOM} = 90^0$.

Do đó $\widehat{IMO} + \widehat{IOM} = \frac{1}{2}\widehat{HOM} = 45^0$

ΔIMO có $\widehat{OIM} = 180^0 - \left(\widehat{IMO} + \widehat{IOM}\right) = 135^0$.



Xét ΔIMO và ΔIAO có OI (chung); $OM = OA(=R)$; $\widehat{IOM} = \widehat{IOA}$ (I là tâm đường tròn nội tiếp ΔHMO). Do đó $\Delta IMO = \Delta IAO$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{IOM} = \widehat{OIA}$ $\widehat{OIA} = 135^0$, OA cố định. Do đó I thuộc cung chứa góc 135^0 dựng trên đoạn thẳng OA.

b. Giới hạn: $M \to A$ thì $I \to A$. Khi $M \to C$ thì $I \to O$. Khi $M \to D$ thì $I \to O$. Vậy M chuyển động trên hai cung chứa góc 135^0 dựng trên đoạn thẳng OA.

3. Kết luận

Sau khi áp dụng kiến thức trong bài báo này vào giải bài toán có liên quan ở THCS, tác giả nhận thấy chất lượng giảng dạy có sự tiến bộ rõ rệt. HS tiếp cận nhanh với các dữ liệu của bài toán, xác định được yêu cầu bài, phân biệt được các dạng toán và giải khá thành thạo. Khái niệm về quỹ tích trở nên gần gũi và quen thuộc đối với HS. Đặc biệt là sau khi giảng dạy chuyên đề vào thức tiễn đã giúp HS nhận dạng bài tập một cách chính xác, không còn hiểu mơ hồ về các thuật ngữ có liên quan, góp phần đưa bài toán trừu tượng thành bài toán quen thuộc để GV có thể dễ dàng truyền đạt và HS tiếp thu kiến thức một cách hứng khởi. Tuy nhiên, không có phương pháp nào là vạn năng mà phải dựa vào chính sự tích cực, chủ động trong việc dạy của GV để vận dụng nhiều phương pháp, chọn lọc kiến thức phù hợp với từng đối tượng HS nhằm thúc đẩy sự hứng khởi học tập của HS, từ đó tạo niềm tin vào năng lực của bản thân trong học tập môn Toán nói chung và các môn học khác nói riêng, góp phần nâng cao chất lượng giáo dục.

Chú thích

(*) Nghiên cứu này được hỗ trợ bởi Trường Đại học Tân Trào, Tuyên Quang, Việt Nam.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Phúc Trình (2019), *Toán quỹ tích và phương pháp giải toán quỹ tích lớp 9*, NXB Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh.

[2] Nguyễn Đức Tấn (2009), *Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán trung học cơ sở quỹ tích tập hợp điểm*, NXB Giáo dục Việt Nam, Hà Nội.

[3] Trần Thị Vân Anh (2010), *Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Hình học 9*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[4] Đỗ Thanh Sơn (2020), *Tuyển chọn một số dạng toán Hình học 9*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[5] Lê Hải Châu, Nguyễn Xuân Quỳ (2018), *Cách tìm lời giải các bài Toán trung học cơ sở* (tập 3 - Hình học), NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[6] Trần Văn Tấn và nhóm giáo viên chuyên Toán Trường Đại học Sư phạm Hà Nội (2018), *Các chuyên đề hình học bồi dưỡng học sinh giỏi trung học cơ sở* (tái bản), NXB Giáo dục Việt Nam, Hà Nội.