MỘT SỐ VÍ DỤ ỨNG DỤNG CỦA ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH TRONG KINH TẾ

LÊ THỊ LOAN
Trường Đại học Xây dựng Miền Trung

Nhận bài ngày 10/4/2025. Sửa chữa xong 16/4/2025. Duyệt đăng 25/4/2025.

Abstract

With advancements in science and technology, linear algebra has become widely applicable across various disciplines. This paper presents several examples of how linear algebra is used in the field of economics, aiming to highlight its importance and demonstrate its practical applications in real-life economic modeling and analysis.

Keywords: *Leontief input-output model, matrix diagonalization, Gauss elimination method, supply-demand function, equilibrium point.*

1. Đặt vấn đề

Đại số tuyến tính là một nhánh của toán học nghiên cứu về các vectơ. Các vectơ này được tìm thấy trong ma trận, đây là một cách dễ dàng để nén thông tin được cung cấp bởi một loạt các phương trình hoặc vectơ. Các ứng dụng của đại số tuyến tính được sử dụng rộng rãi trong nhiều ngành kỹ thuật nhưng bài báo này sẽ tập trung vào các ứng dụng cho lĩnh vực kinh tế. Bởi kinh tế luôn có mối liên hệ chặt chẽ với đại số tuyến tính từ rất lâu đời. Ngay từ khoảng năm 200 trước Công nguyên, con người đã sử dụng đại số tuyến tính cho mục đích kinh tế. Có thể nói đại số tuyến tính bắt nguồn từ nhu cầu tính toán thu nhập của con người. Kiến thức của nó bao gồm ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính, ánh xạ tuyến tính, chéo hóa ma trận, dạng toàn phương [1]. Hầu hết sinh viên của các ngành khoa học và kỹ thuật đều phải học học phần Đại số tuyến tính [2]. Với sự phát triển của khoa học và công nghệ, nó đã được ứng dụng rộng rãi trong khoa học tự nhiên, khoa học xã hội, kỹ thuật, khoa học kinh tế, khoa học quản lý, đặc biệt là trong lĩnh vực kinh tế việc sử dụng đại số tuyến tính là phổ biến, nó cũng có thể dự đoán và phân tích tác động của một chính sách kinh tế. Trong bài báo này, tác giả trình bày một số ví dụ ứng dụng của đại số tuyến tính để chứng minh vai trò quan trọng của nó trong lĩnh vực kinh tế.

2. Một số ví dụ ứng dụng của đại số tuyến tính

2.1. Bài toán đầu vào - đầu ra

Năm 1973, một nhà kinh tế học người Mỹ tên là Wassily Wassilyevich Leontief đã giành được giải Nobel về khoa học kinh tế cho công trình nghiên cứu của ông về phân tích đầu vào - đầu ra của các ngành khác nhau ảnh hưởng lẫn nhau. Phân tích đầu vào - đầu ra là một phương pháp giúp dễ dàng tính toán và dự đoán cung và cầu của một hệ thống. Phân tích đầu vào-đầu ra có thể áp dụng cho các doanh nghiệp nhỏ hoặc thậm chí là các công ty lớn [3].

Bài toán 1: Chúng ta có hai công ty điện E và công ty nước W. Đầu ra của cả hai công ty được tính bằng đô la. Công ty điện sử dụng cả điện và nước (đầu vào) trong quá trình sản xuất điện (đầu ra) và công ty nước sử dụng cả điện và nước (đầu vào) trong quá trình sản xuất nước (đầu ra). Giả sử rằng sản xuất mỗi đô la điện cần 0,3 đô la điện và 0,1 đô la nước và sản xuất mỗi đô la nước cần 0,2 đô la điện và 0,4 đô la nước. Nhu cầu cuối cùng của khu vực là 12 triệu đô la cho điện và 8 triệu đô la cho nước.

Câu hỏi: Mỗi công ty cần sản xuất bao nhiêu điện, nước và cho biết tổng đầu vào của điện và nước để đáp ứng nhu cầu cuối cùng này? Tính sản lượng tạo mới được tạo ra?

Email: lethiloan@muce.edu.vn

Bài giải: Gọi x_1, x_2 lần lượt là tổng đầu ra của điện và nước của mỗi công ty. Ta thấy x_1, x_2 phải lớn hơn nhu cầu cuối cùng của điện và nước vì đầu vào của điện và nước hay là nhu cầu ban đầu cần thiết để tạo ra nhu cầu cuối cùng. Do đó, đối với cả tổng đầu ra của điện và nước ta phải có: Tổng đầu ra = Nhu cầu ban đầu + Nhu cầu cuối cùng.

Trước hết ta có nhu cầu ban đầu của điện và nước như sau: Một đô la điện cần 0,3 đô la điện và 0,1 đô la nước và một đô la nước cần 0,2 đô la điện và 0,4 đô la nước.

Vậy: để tạo ra x_1 đô la điện cần $0.3x_1$ đô la điện và $0.1x_1$ đô la nước.

Để tạo ra x_2 đô la nước cần $0.2x_2$ đô la điện và $0.4x_2$ đô la nước.

Khi đó ta có: $\begin{cases} x_1 = 0.3x_1 + 0.2x_2 + 12 \\ x_2 = 0.1x_1 + 0.4x_2 + 8 \end{cases}$. Đặt $M = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$

Viết lại hệ phương trình trên dưới dạng ma trận: $X = MX + D \Rightarrow (I - M)X = D \Rightarrow X = (I - M)^{-1} D$

$I - M = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$

$(I - M)^{-1} = \frac{1}{0.4}\begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$

Do đó: $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 17 \end{pmatrix}$

Vậy tổng đầu ra của điện là 22 triệu đô và nước là 17 triệu đô.

Ma trận đầu vào và đầu ra: $B = \begin{pmatrix} 0.3x_1 & 0.2x_2 \\ 0.1x_1 & 0.4x_2 \end{pmatrix}$

Tổng đầu vào của điện và nước là: $C = \begin{pmatrix} 0.4x_1 \\ 0.6x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.8 \\ 10.2 \end{pmatrix}$

Vậy sản lượng tạo mới: $X - C = \begin{pmatrix} 13.2 \\ 6.8 \end{pmatrix}$

Sản xuất	Tiêu thụ		Nhu cầu cuối cùng	Tổng đầu ra
	Điện	Nước		
Điện	6.6	3.4	12	22
Nước	2.2	6.8	8	17
Sản lượng tạo mới	13.2	6.8		
Tổng đầu tư	8.8	10.2		

Bảng 1: Bảng phân tích đầu vào - đầu ra

2.2. Bài toán về quỹ thanh toán

Bài toán 2: Để đảm bảo đủ tiền mặt để thanh toán, một công ty tài chính đã lập 54 tỷ tại hai công ty A và B. Sau một thời gian dài nhận thấy phần lớn hai khoản tiền thanh toán của mỗi công ty vẫn được giữ trong mỗi công ty. Công ty A đã chuyển 12% tiền cho công ty B và công ty B đã chuyển 10% tiền cho công ty A. Số tiền ban đầu của hai công ty lần lượt là 26 tỷ và 28 tỷ. Vậy số tiền quỹ thanh toán của mỗi công ty sẽ như thế nào? Nếu một chuyên gia tài chính cho rằng quỹ thanh toán của mỗi công ty không thể ít hơn 24 tỷ, có cần huy động thêm tiền vào hai công ty nếu cần không?

Bài giải: Gọi quỹ thanh toán của công ty A và công ty B lần lượt là a_{k+1}, b_{k+1} [4].

Đặt $a_0 = 28$, $b_0 = 26$. Công ty A đã chuyển 12% tiền cho công ty B hay $0.12a_0$ tỷ. Công ty B đã chuyển 10% tiền cho công ty A hay $0.1b_0$ tỷ. Sau lần chuyển thứ nhất số tiền còn lại của công

ty A là $a_1 = a_0 - 0.12a_0 + 0.1b_0 = 0.88a_0 + 0.1b_0$. Sau lần chuyển thứ nhất số tiền còn lại của công ty B là $b_1 = 0.12a_0 + 0.9b_0$. Suy ra $\begin{matrix} a_{k+1} = 0.88a_k + 0.1b_k \\ b_{k+1} = 0.12a_k + 0.9b_k \end{matrix}$

Viết ở dạng ma trận: $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.1 \\ 0.12 & 0.9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.1 \\ 0.12 & 0.9 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ b_{k-1} \end{pmatrix} = ... = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.1 \\ 0.12 & 0.9 \end{pmatrix}^{k+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$

Để tính $\begin{pmatrix} 0.88 & 0.1 \\ 0.12 & 0.9 \end{pmatrix}^{k+1}$ ta chéo hóa ma trận $A = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.1 \\ 0.12 & 0.9 \end{pmatrix}$.

Kết quả ta được: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{39}{50} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, với $P = \begin{pmatrix} -1 & \frac{5}{6} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Đặt $D = \begin{pmatrix} \frac{39}{50} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Do đó $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^{k+1} = PD^{k+1}P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{5}{6} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{39}{50} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1}\begin{pmatrix} -\frac{6}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{6}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{6}{11}\left(\frac{39}{50}\right)^{k+1} + \frac{5}{11} & -\frac{5}{11}\left(\frac{39}{50}\right)^{k+1} + \frac{5}{11} \\ -\frac{6}{11}\left(\frac{39}{50}\right)^{k+1} + \frac{6}{11} & \frac{5}{11}\left(\frac{39}{50}\right)^{k+1} + \frac{6}{11} \end{pmatrix}$$

Vậy $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{11}\left(\frac{39}{50}\right)^{k+1} + \frac{5}{11} & -\frac{5}{11}\left(\frac{39}{50}\right)^{k+1} + \frac{5}{11} \\ -\frac{6}{11}\left(\frac{39}{50}\right)^{k+1} + \frac{6}{11} & \frac{5}{11}\left(\frac{39}{50}\right)^{k+1} + \frac{6}{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 28 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{11}\left(\frac{39}{50}\right)^{k+1} + \frac{270}{11} \\ -\frac{38}{11}\left(\frac{39}{50}\right)^{k+1} + \frac{324}{11} \end{pmatrix}$.

Ta có $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \frac{270}{11} \approx 24{,}5$ và $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \frac{324}{11} \approx 29{,}5$.

Ta thấy quỹ thanh toán của mỗi công ty đều lớn hơn 24 tỷ, do đó ta không cần huy động thêm tiền vào hai công ty.

2.3. Bài toán lợi nhuận

Bài toán 3: Lợi nhuận của bốn mặt hàng trong bốn tháng đầu năm được liệt kê trong bảng 2. Hỏi lợi nhuận của mỗi mặt hàng là bao nhiêu?

Tháng	Doanh số (nghìn đồng)				Lợi nhuận (nghìn đồng)
	Dầu ăn	Bia	Gạo	Sữa	
1	600	400	600	1500	150
2	300	300	1000	1400	160
3	420	500	900	1600	170
4	500	500	900	800	170

Bảng 2: Doanh thu và lợi nhuận của 4 mặt hàng trong 4 tháng

Bài giải: Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 lần lượt là lợi nhuận của mỗi mặt hàng dầu ăn, bia, gạo, sữa trong 4 tháng.

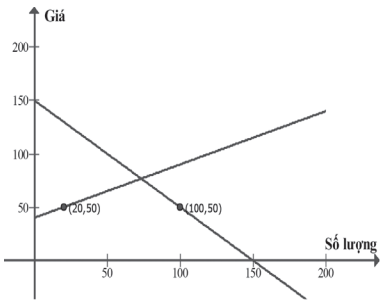
Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} 600x_1 + 400x_2 + 600x_3 + 1500x_4 = 150 \\ 300x_1 + 300x_2 + 1000x_3 + 1400x_4 = 160 \\ 420x_1 + 500x_2 + 900x_3 + 1600x_4 = 170 \\ 500x_1 + 500x_2 + 900x_3 + 800x_4 = 170 \end{cases}$

Sử dụng phương pháp Gauss giải hệ trên ta được: $x_1 = 0.09,\ x_2 = 0.04,\ x_3 = 0.11,\ x_4 = 0.01.$

Vậy phần trăm lợi nhuận của mỗi mặt hàng dầu ăn, bia, gạo, sữa lần lượt là: 9%, 4%, 11%, 1%.

2.4. Bài toán cung và cầu

Hàm cầu liên quan đến giá p của một sản phẩm với nhu cầu của người tiêu dùng, hàm cung liên quan đến giá p của sản phẩm với mức độ sẵn sàng cung cấp sản phẩm của nhà sản xuất. Điểm cắt nhau (p,q) của đồ thị hàm cầu $p=D(x)$ và đồ thị hàm cung $p=S(x)$ được gọi là điểm cân bằng [5].



Bài toán 4: Một công ty bán giày xác định hàm cung là $2p-q=80$ và hàm cầu là $p+q=150$.

a. Nếu công ty bán một đôi giày với giá 50 đô la thì khi đó thiếu hụt (cầu lớn hơn cung) hay dư thừa (cung lớn hơn cầu)?

Tìm điểm cân bằng khi cung đáp ứng cầu?

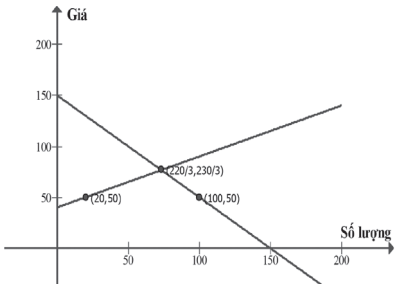
Bài giải:

a. Thay $p=50$ vào hàm cung $2p-q=80\Rightarrow q=20.$

Thay $p=50$ vào hàm cầu $p+q=150\Rightarrow q=100$.

Số lượng cầu lớn hơn vì vậy sẽ bị thiếu hụt.

b. Đặt $p=y,\ q=x$ thì phương trình hàm cung là: $2y-x=80$ hay $y=\frac{1}{2}(80+x)$, Phương trình hàm cầu là: $y+x=150$ hay $y=150-x$.



Điểm cân bằng là $\left(\frac{220}{3},\frac{230}{3}\right)\approx(73.3,76.7)$.

Vậy cần sản xuất 73 đôi giày với giá mỗi đôi là 77 đô la.

3. Kết luận

Trong bài báo này, tác giả chủ yếu sử dụng các kiến thức của ma trận như ma trận nghịch đảo, giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss, chéo hóa ma trận để áp dụng giải một số bài toán thực tiễn. Trong đó mô hình đầu vào-đầu ra Leontief rất hữu ích trong kinh tế học vì với mô hình này, chúng ta có thể tính toán các tác động dự kiến của những thay đổi trong nhu cầu cuối cùng hoặc ma trận tiêu dùng. Phương pháp này cũng có thể được sử dụng như một công cụ giúp các công ty thiết lập giá để họ có thể có lợi nhuận tối đa. Chúng ta cũng có thể thử thay đổi đầu ra của mình với tư cách là nhà sản xuất và xem nó có tác động gì đến ma trận tiêu dùng và vectơ nhu cầu cuối cùng. Đại số tuyến tính không chỉ được áp dụng trong lĩnh vực kinh tế để tối ưu hóa việc đầu tư và quản lý rủi ro mà còn được áp dụng rộng rãi cho rất nhiều lĩnh vực khác nhau, đây là công cụ có thể giúp bạn giải quyết một cách hiệu quả nhiều bài toán trong cuộc sống và thúc đẩy các ngành khác phát triển.

Tài liệu tham khảo

[1] Đỗ Công Khanh (chủ biên), Nguyễn Minh Hằng, Ngô Thu Lương (2005), *Đại số tuyến tính*, NXB Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh.

[2] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2006), *Toán học cao cấp*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

[3] Nathan James Runtuwene (2016), *Applications of Linear Algebra in Economics (Ứng dụng của Đại số tuyến tính trong Kinh tế)*, nguồn: https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2015-2016/Makalah-2015/Makalah-IF2123-2015-003.pdf.

[4] Liu guoliang, Li Hua (2007), *Application examples of Linear Algebra in the field of Economics (Ví dụ ứng dụng của Đại số tuyến tính trong lĩnh vực Kinh tế)*, nguồn: https://journals.indexcopernicus.com/api/file/viewByFileId/410141.

[5] Nguyễn Huy Hoàng (2014), *Toán cơ sở cho kinh tế*, NXB Giáo dục Việt Nam, Hà Nội.