

MỐI LIÊN HỆ GIỮA TOÁN CAO CẤP VÀ TOÁN SƠ CẤP QUA MỘT SỐ CHỦ ĐỀ ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

ĐÀO HƯƠNG THỦY
Khoa Văn hóa và Kiến thức cơ bản,
Học viện Múa Việt Nam

Nhận bài ngày 26/3/2026. Sửa chữa xong 13/5/2026. Duyệt đăng 18/5/2026.

Abstract

The history of the mathematical development shows that many concepts of Advanced Mathematics originate from Elementary Mathematics. However, the Advanced Mathematics Program at universities is often highly theoretical with little clear connection with Elementary Mathematics which makes students hard to recognize this connection. In addition, Mathematics plays an important role as confirmed in the 2018 general education program, which requires teachers to obtain a solid knowledge of Advanced Mathematics to be able to apply it in teaching Elementary Mathematics. This not only helps teachers to observe Elementary Mathematics from a broader perspective, but also generates creative ways of solving problems, helping students better understand the practical applications of mathematical knowledge.

Keywords: Connection, Advanced Mathematics, Elementary Mathematics, Algebra, Analysis.

1. Đặt vấn đề

Tại các trường đại học, trong các khoa như Sư phạm Toán, các kiến thức Toán cao cấp gồm các định nghĩa, định lý, hệ quả, ví dụ minh họa và ứng dụng, thường mang tính chất "hàn lâm" có tính chặt chẽ, chính xác, lý thuyết cao nhưng lại thiếu sự liên kết với Toán sơ cấp dạy ở bậc Trung học cơ sở và Trung học phổ thông. Các giáo trình Toán học thường không chỉ rõ mối liên hệ giữa Toán học cao cấp và toán học sơ cấp khiến Toán cao cấp gần như là một thế giới tách biệt hoàn toàn với Toán phổ thông. Vì vậy, vấn đề quan trọng là làm thế nào có thể chỉ rõ mối quan hệ này, càng nhiều càng tốt cho SV (sinh viên) ngành sư phạm Toán, giúp SV hiểu biết rõ ràng các mối liên hệ này, từ đó có thêm động lực tích cực để học tốt các kiến thức Toán ở đại học, cũng như có thể ứng dụng các kiến thức từ Toán cao cấp vào việc giảng dạy sau này. Bởi thế cho nên, đề tài nghiên cứu "Mối liên hệ giữa Toán cao cấp và Toán sơ cấp qua một số chủ đề Đại số và Giải tích" là một vấn đề nghiên cứu rất cần thiết và rất đáng được quan tâm.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Mối liên hệ giữa chủ đề ma trận, định thức với toán học phổ thông

Chủ đề Ma trận, Định thức và các phương pháp biến đổi liên quan là những nội dung toán học quan trọng trong các giáo trình đào tạo SV ngành Sư phạm Toán học, các ngành Kinh tế, các ngành Kỹ thuật [1], [4], [5]. Sau đây, tôi sử dụng lý thuyết của mạch kiến thức này để giải một số bài toán ở phổ thông.

2.1.1. Kiến thức cơ sở

a. Định nghĩa ma trận và định thức

- Ma trận kiểu (m, n) là một bảng gồm $m.n$ số được viết thành m dòng, n cột như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Trong đó a_{ij} là phần tử ở hàng thứ i và cột thứ j với $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

- Định thức của A , ký hiệu $\det(A)$ (hoặc $\det A$) là biểu thức:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ được tính bằng quy nạp như sau:}$$

$$n = 1: A = (a_{11}) \Rightarrow \det(A) = a_{11} = \det(M_{11})$$

$$n = 2: A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}).$$

...

$$n \text{ bất kì: } \det(A) = a_{11} \cdot \det(M_{11}) - a_{12} \cdot \det(M_{12}) + a_{13} \cdot \det(M_{13}) - \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \cdot \det(M_{1n}).$$

b. Phương pháp khử Gauss

$$\text{Giả sử có hệ tam giác như sau: } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Để giải hệ phương trình này chúng ta sử dụng phép thế: từ phương trình thứ n ta tìm được x_n , thế giá trị x_n vào phương trình thứ $n-1$ ta được x_{n-1} , thế giá trị x_n, x_{n-1} vào phương trình $n-2$ ta được x_{n-2} , ... cứ như vậy tìm được nghiệm của hệ phương trình ban đầu.

Để giải hệ phương trình tuyến tính $Ax = b, A = (a_{ij})_{n \times n}$, ta viết ma trận vế phải b vào sau ma trận hệ số A để được ma trận hình chữ nhật $[A, b]$. Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp (nhân một hàng với một số $k \neq 0$; đổi chỗ hai hàng; nhân một hàng với một số k rồi cộng vào một hàng khác) để đưa ma trận A trong ma trận $Ax = b$ về dạng tam giác. Vì các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính nên ta có hệ ban đầu $Ax = b$ tương đương với một hệ tam giác, từ đó tìm được nghiệm của hệ đã cho.

c. Phương pháp Cramer

Hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$ được gọi là một hệ Cramer nếu ma trận hệ số A là ma trận vuông và $\det(A) \neq 0$. Hệ Cramer $Ax = b$ với $(a_{ij})_{n \times n}$ luôn có nghiệm duy nhất xác định bởi $\left(x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)} \right)$.

Trong đó, $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ là ma trận sinh ra từ ma trận A bằng cách thay cột thứ i của ma trận A bởi cột vế phải.

2.1.2. Sử dụng lý thuyết về ma trận, định thức để giải bài toán hệ phương trình ở phổ thông

Sau đây, ta sẽ sử dụng phương pháp Gauss, phương pháp Cramer để giải bài toán về hệ phương trình nhiều ẩn ở phổ thông sau:

Bài toán 1. Giải hệ phương trình sau:

$$\text{a) (I) } \begin{cases} 2x - 4y - 3z = 5(1) \\ x - 3y + 4z = -29(2) \\ 4x - y = 8(3) \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - 3y + 3z - 2t = 6 \\ 3x + 7y - z + 5t = 4 \\ -2x - 3y + 5z + t = -3 \\ 4x + 5y - 2z - 3t = 7 \end{cases}$$

Lời giải:

a) Giải phương trình trên bằng phương pháp Gauss. Nhân 2 vế của phương trình (2) của hệ với (-2)

rồi cộng với phương trình (1) theo từng vế tương ứng ta được phương trình (2'). Nhân 2 vế của phương trình (1) của hệ với (-2) rồi cộng với phương trình (3) theo từng vế tương ứng ta được phương trình (3'), ta được hệ phương trình (II) đã khử ẩn x đối với phương trình thứ 2, như sau:

$$(II) \begin{cases} 2x - 4y - 3z = 5(1) \\ 2y - 11z = 63(2') \\ 7y + 6z = -2(3') \end{cases}$$

Nhân 2 vế của phương trình (2') với 7 ta được phương trình (2''); nhân 2 vế của phương trình (3') của hệ với (-2) ta được phương trình (3'') ta được hệ phương trình (III) như sau:

$$(III) \begin{cases} 2x - 4y - 3z = 5(1) \\ 14y - 77z = 441(2'') \\ -14y - 12z = 4(3'') \end{cases}$$

Cộng 2 vế của phương trình (2'') với phương trình (3'') ta được phương trình (3''') và hệ phương trình (IV) như sau:

$$(IV) \begin{cases} 2x - 4y - 3z = 5(1) \\ 14y - 77z = 441(2'') \\ -89z = 445(3''') \end{cases}$$

Từ (3''') ta suy ra $z = -5$, thay $z = -5$ vào phương trình (2'') suy ra $y = 4$; thay $y = 4, z = -5$ vào phương trình (1) ta có $x = 3$. Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y; z) = (3; 4; -5)$

b) Ta có ma trận hệ số của hệ phương trình sau: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -1 & 5 \\ -2 & -3 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = -403$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 7 & -1 & 5 \\ -3 & -3 & 5 & 1 \\ 7 & 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ -2 & -3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & -2 \\ 3 & 7 & 4 & 5 \\ -2 & -3 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & -3 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 6 \\ 3 & 7 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & 5 & -3 \\ 4 & 5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Ta có: $\det(A_1) = -1339, \det(A_2) = 429, \det(A_3) = -12, \det(A_4) = -122$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là:

$$\left(x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{103}{31}; y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-33}{31}; z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{12}{403}; t = \frac{\det(A_4)}{\det(A)} = \frac{122}{403} \right)$$

2.2. Mối liên hệ giữa chủ đề Dãy số với toán học phổ thông

Nội dung Dãy số và Giới hạn dãy số là một trong các mạch kiến thức quan trọng trong Chương trình đào tạo SV các ngành Sư phạm Toán, các ngành Kỹ thuật và được viết khá hàn lâm trong các giáo trình đại học [2], [3]. Dưới đây là một số kiến thức cơ sở được sử dụng để giải một số bài toán xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi ở phổ thông.

2.2.1. Kiến thức cơ sở

a. **Khái niệm giới hạn dãy số:** Định nghĩa giới hạn của dãy số thực: Cho dãy số thực $\{u_n\}$. Số $a \in \mathbb{R}$ được gọi là giới hạn của dãy nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước bao giờ cũng tồn tại một số n_0 (phụ thuộc ε) sao cho với mọi $n > n_0$ ta đều có $|u_n - a| < \varepsilon$. Khi đó, ta nói rằng dãy $\{u_n\}$ hội tụ đến a hay tiến đến giới hạn a và $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$.

b. **Sử dụng tính đơn điệu để xét tính hội tụ của dãy số**

- Nếu $\{u_n\}$ là dãy tăng bị chặn trên thì nó hội tụ và giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sup u_n$.

- Nếu $\{u_n\}$ là dãy giảm bị chặn dưới thì nó hội tụ và giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \inf u_n$.

2.2.2. Sử dụng lý thuyết hội tụ để giải bài toán dãy số trong đề thi học sinh giỏi ở phổ thông.

Bài toán sau đây là một dạng toán nâng cao được sử dụng trong các kỳ thi học sinh giỏi ở phổ thông.

Bài toán 2. Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định theo công thức sau: $u_1 = \sqrt{2}$; $u_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$; ...;
 $u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$.

Hãy tìm giới hạn của dãy số $\{u_n\}$ trên.

Nhận xét: Để giải bài toán trên với kiến thức ở phổ thông, việc tính trực tiếp giới hạn của dãy số là rất khó khăn. Tuy nhiên, nếu sử dụng lý thuyết tính đơn điệu của dãy số thì việc tìm giới hạn của dãy số $\{u_n\}$ trở nên đơn giản hơn. Sau đây là lời giải chi tiết áp dụng kiến thức toán cao cấp để giải bài toán.

Lời giải: Ta chú ý rằng: $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Do $u_1 = \sqrt{2} < 2$ nên $u_2 = \sqrt{2 + u_1} < \sqrt{2 + 2} = 2$.

Do đó nếu giả sử $u_n < 2$ thì $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} < 2$. Chứng minh quy nạp ta chỉ ra rằng dãy số trên bị chặn trên bởi 2. Lại có: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2 + u_n}}{u_n} = \sqrt{\frac{2}{u_n^2} + \frac{1}{u_n}} > \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{1}{2}} = 1$. Do đó $u_{n+1} > u_n$.

Suy ra $\{u_n\}$ là dãy tăng. Vậy $\{u_n\}$ là dãy tăng và bị chặn trên nên nó là dãy hội tụ. Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$. Từ biểu thức $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ ta có $a^2 = 2 + a$. Suy ra $a = 2$. Vậy dãy số $\{u_n\}$ có giới hạn là 2.

Bài toán 3 (Đề thi HSG QG năm 2012). Cho dãy số (x_n) được xác định bởi: $x_1 = 3$ và $x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2), \forall n = 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn, tính giới hạn đó.

Nhận xét: Bài toán trên nằm trong đề thi HSG QG năm 2012, với dạng toán này thì việc tìm số hạng tổng quát x_n từ đó tính giới hạn của dãy số theo kiến thức toán phổ thông dùng sẽ gặp khó khăn. Tuy nhiên, sử dụng lý thuyết tính đơn điệu của dãy số thì việc tìm giới hạn của dãy số trở nên đơn giản hơn. Sau đây là lời giải chi tiết áp dụng kiến thức toán cao cấp để giải bài toán.

Lời giải: Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $x_{n-1} \geq \frac{n+2}{3n}, \forall n = 3, 4, \dots$ Suy ra dãy số (x_n) bị chặn dưới bởi số 0. Mặt khác, $x_n - x_{n-1} = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2) - x_{n-1} = \frac{2[n+2 - (n-1)x_{n-1}]}{3n} \leq 0$. Vậy dãy số (x_n) giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn hữu hạn.

Đặt $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ từ biểu thức $x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2), \forall n = 2, 3, \dots$ Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2)$ hay $a = \frac{1}{3}(a + 2) \Leftrightarrow a = 1$. Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$.

2.3. Mối liên hệ giữa các định lý giá trị trung bình với toán học phổ thông

Các định lý giá trị trung bình là nội dung nằm trong mạch kiến thức Giải tích trong Chương trình Toán cao cấp mà có nhiều ứng dụng trong các bài toán phổ thông.

2.3.1. Kiến thức cơ sở

a. **Định lý Rolle:** Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trong khoảng (a, b) thỏa mãn $f(a) = f(b)$. Khi đó tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

b. **Định lý Lagrange:** Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trong khoảng (a, b) . Khi đó tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

c. **Định lý Cauchy:** Giả sử hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trong khoảng (a, b) . Khi đó tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

2.3.2. Sử dụng các định lý giá trị trung bình giải một số bài toán ở phổ thông

Sau đây, ta sử dụng Định lý Rolle để giải một bài toán phương trình mũ dành cho học sinh khá giỏi trong chương trình môn Toán lớp 11.

Bài toán 4. Giải phương trình $3^x + 5^x = 2.4^x$.

Nhận xét: Theo chương trình toán phổ thông, ta sẽ giải phương trình bằng phương pháp hàm số. Vì phương trình không có nghiệm duy nhất nên sẽ gặp khó khăn khi sử dụng phương pháp này. Tuy nhiên, nếu sử dụng Định lý Rolle thì việc giải bài toán trở nên đơn giản. Sau đây là lời giải chi tiết áp dụng kiến thức toán cao cấp để giải bài toán.

Lời giải: Nhận thấy $x = 0; x = 1$ là hai nghiệm của phương trình, bằng cách thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình. Ta sẽ chứng minh phương trình chỉ có hai nghiệm trên.

Gọi x_0 là nghiệm của phương trình đã cho. Ta được: $3^{x_0} + 5^{x_0} = 2.4^{x_0} \Leftrightarrow 5^{x_0} - 4^{x_0} = 4^{x_0} - 3^{x_0}$. Xét hàm số $f(t) = (t+1)^{x_0} - t^{x_0}$ suy ra $f(t)$ liên tục trên $[3; 4]$, khả vi trong khoảng $(3; 4)$ và theo trên ta có $f(4) = f(3)$. Do đó áp dụng Định lý Rolle tồn tại $c \in (3; 4)$ sao cho $f'(c) = 0$. Suy ra $x_0[(c+1)^{x_0-1} - c^{x_0-1}] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 1 \end{cases}$. Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$.

Bài toán 5. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{a-b}{2} \leq \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \leq \frac{b-a}{2}$.

Nhận xét: Bài toán trên là dạng toán nâng cao trong các kỳ thi HSG của lớp 11. Nếu sử dụng các phép biến đổi lượng giác để đánh giá bất đẳng thức trên thì không khả thi. Nhưng nếu khéo léo vận dụng Định lý Lagrange thì sẽ giải quyết được vấn đề của bài toán. Sau đây là lời giải chi theo hướng áp dụng Định lý Lagrange.

Lời giải: Bất đẳng thức cần chứng minh suy ra $a - b \leq \sin a - \sin b \leq b - a$. Vậy ta cần chứng minh bất đẳng thức: $|\sin a - \sin b| \leq |b - a|$.

Xét hàm số $f(x) = \sin x, x \in (a, b)$. Suy ra hàm số f liên tục và khả vi trong (a, b) . Áp dụng định lý Lagrange tồn tại số $c \in (a, b)$ sao cho $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Do đó ta có $\sin b - \sin a = \cos c(b - a)$. Suy ra $|\cos c| = \frac{|\sin b - \sin a|}{b - a}$. Vì $|\cos x| \leq 1$ nên $\frac{|\sin b - \sin a|}{b - a} \leq 1$.

Vậy ta có $|\sin a - \sin b| \leq |b - a|$.

3. Kết luận

Bài báo "Mối liên hệ giữa Toán cao cấp và Toán sơ cấp qua một số chủ đề Đại số và Giải tích" đã giúp soi sáng một phần mối liên hệ giữa Toán cao cấp và Toán sơ cấp, dạy ở bậc Trung học cơ sở và Trung học phổ thông. Mong rằng trong chương trình Toán dành cho SV ngành Sư phạm Toán học, những chủ đề Toán cao cấp nào mà có thể tích hợp được với các bài toán tương ứng ở phổ thông thì nên tích hợp tối đa, tổng hợp thành các dạng cụ thể, các chuyên đề đầy đủ giúp SV có thêm động lực và hứng thú trong quá trình học tập. Do thời gian nghiên cứu có hạn, tôi mong được sự quan tâm đóng góp ý kiến của các thầy cô, các bạn đồng nghiệp để bài nghiên cứu có chất lượng tốt hơn.

Tài liệu tham khảo

- Lê Tuấn Hoa. (2016). *Đại số tuyến tính qua ví dụ và bài tập*. NXB Giáo dục Việt Nam.
- Trần Đức Long, Nguyễn Đình Sang, & Hoàng Quốc Toàn. (2008). *Giáo trình Giải tích* (Tập 1-3). NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.
- Nguyễn Tiến Mạnh (Chủ biên), Hoàng Công Kiên, Nguyễn Thị Thanh Tâm, Nguyễn Văn Nghĩa, & Trần Anh Tuấn. (2017). *Giáo trình Đại số sơ cấp*. NXB Đại học Thái Nguyên.
- Đoàn Quỳnh. (2005). *Giáo trình Đại số tuyến tính và hình học giải tích*. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.
- Lê Đình Thúc. (2007). *Toán cao cấp cho các nhà kinh tế: Phần I. Đại số tuyến tính*. NXB Đại học Kinh tế Quốc dân.